

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова
Российской академии наук

На правах рукописи



УСОВ ПАВЕЛ ПАВЛОВИЧ

ОБЕСПЕЧЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ УЗЛОВ ТРЕНИЯ НА
СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ
МОДЕЛИРОВАНИЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ

2.5.3 – Трение и износ в машинах

Диссертация на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант:

Албагачиев Али Юсупович

доктор технических наук, профессор

Москва – 2024

Введение.....	5
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ПОДШИПНИКОВ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ	22
1.1. Внутренний гидродинамический контакт абсолютно цилиндров.....	27
1.2. Деформации тонкого вкладыша в неметаллическом радиальном подшипнике скольжения	37
1.3. Неметаллический радиальный подшипник скольжения.....	39
1.4. Деформации кругового кольца.....	60
1.5. Плоская изотермическая УГД задача смазки радиального подшипника скольжения	68
1.6. УГД задача смазки упругого цилиндра и упругого пространство с цилиндрическим вырезом при наличии тонкого упругого вкладыша с малым модулем упругости.....	81
1.7. Плоская неизотермическая задача для радиального подшипника скольжения.....	82
1.8. Неизотермическая УГД задача смазки радиального подшипника конечной длины.....	94
1.9. УГД задача смазки упорного подшипника скольжения.....	111
Выводы по главе 1.....	121
2. СТАЦИОНАРНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ КОНТАКТ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОГО СМАЗОЧНОГО МАТЕРИАЛА.....	123
2.1. Смазка жестких цилиндров.....	124
2.2. Контакт жестких тел с тонкими упругими покрытиями при наличии тонкого слоя вязкого смазочного материала.....	142
2.3. Контакт упругих цилиндров при наличии тонкого слоя вязкого смазочного материала.....	168
2.4. Контакт упругих тел с покрытиями из упругих и вязкоупругих материалов при наличии тонкого слоя вязкого смазочного материала.....	182
2.5. Сопоставление теории и эксперимента.....	202

2.6. Влияние деформаций на высоту неровностей профиля в области высокого давления шероховатых поверхностей	204
2.7. Примеры расчета узлов трения.....	206
Выводы по главе 2.....	210
3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ.....	212
3.1. Численный анализ переходных процессов во внешнем УГД – контакте цилиндров при реверсе.....	215
3.2. Численный анализ процесса формирования смазочного слоя при движении упругих тел из состояния покоя.....	226
3.3. Численный анализ переходных процессов в неметаллическом подшипнике скольжения при реверсивном движении.....	244
3.4. Численный анализ переходных процессов в радиальном подшипнике скольжения при реверсивном движении. Учет деформаций вала и втулки.....	254
Выводы по главе 3.....	270
4. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УЗЛОВ ТРЕНИЯ.....	272
4.1. Инженерная методика расчета радиальных подшипников скольжения жидкостного трения.....	272
4.2. Инженерная методика расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимального давления в смазочном слое в локальном контакте упругих тел.....	293
Выводы по главе 4.....	302
5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	303
5.1. Методика исследований.....	303
5.2. Конструкция испытательного стенда.....	307
5.3. Результаты испытаний.....	310
Выводы по главе 5.....	317

Заключение.....	318
Список литературы	322
Приложение.....	339
1. Коды программ расчета опорного подшипника скольжения.....	339
2. Коды программ расчета параметров локального контакта.....	351
3. Документы, подтверждающие результаты научных исследований.....	355

Введение

Актуальность темы исследования. Настоящая работа посвящена гидродинамическим узлам трения в условиях сильного влияния деформаций поверхностей на толщину смазочного слоя, давление и тепловые процессы.

В качестве опор валков проволочных, сортовых и листовых прокатных станов используются гидродинамические подшипники (подшипники жидкостного трения, ПЖТ). Наличие несущей масляной пленки между трущимися поверхностями исключает механический контакт и определяет основные свойства подшипников:

- малый коэффициент трения при установившемся режиме работы, равный 0.001 – 0.005;
- высокую допустимую скорость (до 80 м/сек);
- высокую несущую способность (усредненная удельная нагрузка доходит до 25 МПа);
- малую чувствительность к кратковременным динамическим нагрузкам.

Размер подшипников охватывает диапазон (номинальный диаметр скольжения) от 140 до 1800 мм.

Основные правила эксплуатации ПЖТ для опор валков прокатных станов изложены в ГОСТ 22915 – 78. Срок службы до первого ремонта, например, ПЖТ рабочих клеток станов горячей прокатки должен соответствовать 24 месяца, а ПЖТ клеток листовых станов холодной прокатки – 36 месяцев.

Чтобы данные требования выполнялись, на этапе проектирования должно быть проведено качественное математическое моделирование

разрабатываемого ПЖТ, состоящее в определении нагрузочной способности подшипника, максимальной температуры в подшипнике, расчете прокачки смазки через подшипник.

Экспериментальные исследования крупногабаритных и тяжело нагруженных подшипников скольжения показали, что на нагрузочную способность подшипника и температуру в нем значительное влияние оказывают деформации поверхностей трения. Поэтому расчет с необходимой точностью ПЖТ для опор валков прокатных станов должен состоять в совместном решении уравнений, определяющих деформации поверхностей трения, уравнений гидродинамики и уравнений, описывающих тепловые процессы в подшипнике. Приближенное математическое моделирование физических процессов в ПЖТ при его расчете приводит к невозможности выхода стана на проектную нагрузку, или скорость, что влечет за собой понижение сортности проката, либо преждевременный ремонт опор и, как следствие, большие материальные потери. Такие случаи имели место на практике.

Опоры валков реверсивных прокатных станов работают в режимах, когда скорость движения поверхностей уменьшается до нуля, а затем возрастает в противоположном направлении. При скорости поверхностей, близкой к нулю генерация давления в смазочном слое вследствие увлечения смазочного материала в зазор поверхностями становится невозможной. Однако при этом давление возникает за счет сдавливания пленки и поверхности остаются разделенными смазочным слоем необходимой толщины в течение всего периода реверсивного движения. Для обеспечения жидкостного режима работы узла трения необходимо провести его численное моделирование на стадии проектирования с целью проверки существования смазочного слоя необходимой толщины в моменты времени, когда скорость близка к нулю.

Локальный контакт в зубчатых передачах, подшипниках качения и других узлах трения работает при высоких давлениях ($\sim 10^9$ Па). В работе

[138] экспериментально подтверждено наличие, впервые обнаруженного А.И. Петрусевичем теоретически, второго максимума давления в области контакта, впоследствии названного вторым пиком давления.

Второй пик давления может значительно (на десятки процентов) превышать основной максимум. От максимального давления зависят износостойкость и контактная прочность узла трения. Их расчет на стадии проектирования возможен только при определении с необходимой точностью максимального давления в смазочном слое. Режим трения определяется по минимальной толщине смазочного слоя. Условием гидродинамического режима является превышение минимальной толщины смазочного слоя в 3...5 раз суммарной высоты микронеровностей. Ее определение на стадии проектирования является необходимым условием расчета несущей способности узла трения с локальным контактом в гидродинамическом режиме. В настоящее время отсутствует методика расчета максимального давления в смазочном слое с учетом второго пика давления. Методика расчета минимальной толщины смазочного слоя ограничена узким диапазоном значений коэффициента жесткости.

В последнее время появилась тенденция исследования процесса формирования смазочного слоя в локальном контакте на начальном этапе движения поверхностей трения из состояния покоя. Данный процесс изучался экспериментально в работе [99]. В ней показано, что в начальный момент движения большинство смазочных жидкостей образуют фронт, который распространяется по направлению движения поверхностей с почти неизменной формой. В работе [111] предложена математическая модель процесса формирования смазочного слоя при движении из состояния покоя и приведено сопоставление результатов расчета по этой модели с экспериментальными данными. Сопоставление показало, что теоретическое значение высоты фронта значительно ниже экспериментального.

Определение параметров смазочного слоя, влияющих на его толщину и давление в нем до разделения поверхностей, позволит найти методы

повышения высоты фронта смазочного материала при его прохождении через область контакта до полного разделения поверхностей, что окажет положительное влияние на работоспособность узла трения.

Степень разработанности темы исследования.

УГД задачи применительно к радиальным подшипникам скольжения рассматривались в работах Коднира А. С., Рождественского Ю. В., Хозенюка Н. А., Рыбкина Н. Н., Зернина М. В., Ахвердиева К. С., Angra S., Higginson G. R., Bendaoud N., Bouyer J., Lahmar M. и др.

В работах А. С. Коднира [33 - 36] с соавторами реальные упругие тела заменялись тонкими упругими покрытиями, в которых перемещение поверхности деформируемого тела в какой-либо точке пропорционально давлению на поверхность в этой же точке. Использование таких решений для расчета крупногабаритных опор скольжения дает неизвестную погрешность.

В работах К. С. Ахвердиева [3], Ф.П. Снеговского [47] и др. принималось допущение о том, что после деформаций в зоне гидродинамических давлений шип и подшипник остаются кругло-цилиндрическими с измененными радиусами кривизны и зазор между поверхностями имеет вид зазора между двумя эксцентрическими окружностями.

На значимость влияния деформаций на характеристики подшипника было указано в работе [80]. Показано, что механические деформации существенно снижают максимальное давление, существенно модифицируют профиль зазора смазки, но не оказывают большого влияния на минимальную величину толщины пленки. Эти выводы были сделаны на основе анализа результатов двух расчетов при большой минимальной толщине смазочного слоя.

В работах других авторов [76, 79, 110, 126] используется метод последовательного решения уравнений гидродинамики и уравнений контактных деформаций. Данные итерации сходятся только при слабом влиянии деформаций на решение задачи. То есть полученные таким образом

и опубликованные решения близки к решению ГД задачи теории смазки, в которой деформации не учитываются. В связи с этим в работах, как правило, приводятся решения УГД задач при удельной нагрузке, не превышающей 3 Мпа и при скоростях менее 10 м/с.

В большинстве опубликованных работ, посвященных смазке радиальных подшипников скольжения, рассматривались плоские УГД задачи, в которых зазор не изменяется по длине подшипника. Отсутствуют решения пространственных УГД задач в условиях высоких деформаций поверхностей трения

В настоящее время расчет реверсивного режима работы опор валков прокатных станов основан на решении М.В. Коровчинского задачи о поступательном движении шипа вдоль линии центров при отсутствии вращения и не учете деформаций [38]. При этом определяется период реверсивного движения, при котором минимальная толщина смазочного слоя достигает критического значения в режиме жидкостного трения. Для более точного определения такого периода необходимо учесть вращение вала и деформации поверхностей трения.

УГД задачи применительно к упорным подшипникам скольжения рассматривалась в работе [2]. При этом деформации определялись не путем совместного решения полной системы уравнений, а путем определения давления в смазочном слое при жестких телах и дальнейшего определения деформаций от полученного распределения давления. Используя полученные деформации, уточнялась толщина смазочного слоя и распределение давления в смазочном слое. Кроме того, для подшипников с самоустанавливающимися подушками не учитывалось влияние деформаций на поворот подушек. Подобные решения также не позволяют проводить качественный анализ опорных подшипников скольжения на стадии проектирования при сильном влиянии деформаций на решение УГД задачи. Вопрос о разработке методов расчета упорных подшипников скольжения в условиях упругих деформаций также остается открытым.

В процессе поисков численных методов решения УГД задач для локального контакта после работ А.М. Эртеля, А.Н. Грубина [23, 73] и А.И. Петрусевича [45] было обнаружено, что прямые итерации сходятся лишь при очень малых отклонениях от решения ГД задачи для жестких поверхностей. **УГД задача была признана одной из самых сложных задач механики.**

Влияние деформаций поверхностей, разделенных смазочным слоем, на решение УГД задачи при внешнем линейном контакте можно охарактеризовать безразмерным параметром $V = \frac{3\pi^2 \mu_0 u R' E'}{W^2}$. Здесь μ_0 - вязкость смазочного материала при температуре 40°C и комнатной температуре, u - скорость качения, R' - приведенный радиус, E' - приведенный модуль упругости, W - нагрузка на единицу длины. При $V \rightarrow 0$ решение УГД задачи переходит в решение задачи о контакте упругих тел при отсутствии смазочного слоя, при $V \rightarrow \infty$ решение УГД задачи переходит в решение ГД задачи.

Безразмерный параметр V применительно к локальному контакту будем называть числом (коэффициентом) жесткости.

Влияние роста вязкости смазочного материала с ростом давления характеризует безразмерный параметр $G = \alpha_p p_g$. Здесь α_p - коэффициент зависимости вязкости смазки от давления, p_g - герцево давление, т. е. максимальное давление в контакте при отсутствии смазочного слоя.

Первые численные решения УГД задачи для линейного контакта были получены Д. Доусоном и Г. Р. Хиггинсоном [86]. В работе учитывалось влияние давления на вязкость, но не учитывалось влияние на плотность смазочного материала. Уравнение Рейнольдса записывалось в инверсной (inverse) форме, т. е. в виде кубического уравнения относительно толщины смазочного слоя. Из этого уравнения определялась толщина смазочного слоя при заданном распределении давления. По полученной толщине определялось и корректировалось давление. В статье приведены четыре решения при значениях параметров $V = 0.0011, G = 8.37$; $V = 0.0055, G = 5.58$;

$V = 0.087, G = 2.8$ и $V = 1.4, G = 1.4$. Во всех четырех случаях функция распределения давления имеет один максимум, т. е. второй пик давления отсутствует.

Д. Доусоном и др. метод был усовершенствован и были получены решения при наличии второго максимума давления [85, 87-89]. Подробно метод численного решения задачи описан в статье [85]. В работе учитывалось влияние скольжения на вязкость смазочного материала. Результаты приведены при одном значении параметра $V = 0.291$. Распределение давления имеет острый второй максимум давления, значение которого не превышает основной максимум давления.

Заметный вклад в развитие контактно-гидродинамической теории смазки внес Д. С. Коднир. Работы Д. С. Коднира основаны на замене упругих тел основаниями Винклера и по существу относятся к УГД смазке некоторого тонкого упругого слоя между двумя цилиндрами. В полученных решениях УГД задачи для тонкого упругого слоя между жесткими телами распределение давления в смазочном слое имеет один максимум. Возможность применения полученных решений для расчета реальных УГД контактов остается неясной. Согласование интегральных характеристик решений с экспериментом и обычным УГД расчетом может быть получено только специальным подбором постоянной Винклера, не являющейся физической характеристикой сплошной среды. Основные результаты Д. С. Коднира опубликованы в работах [33 - 36].

В работах М. А. Галахова, К. И. Заппарова и В. П. Ковалева, основные результаты которых опубликованы в монографии [12], не публикуется подробно метод решения УГД задачи. Авторами приведены конечно-разностные схемы исходных систем уравнений и сказано, что полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона-Рафсона. Приведенной информации недостаточно, чтобы повторить решение. Приведены семь графиков распределения давления со вторым пиком давления, формула для минимальной толщины смазочного слоя, полученная

путем среднеквадратичной аппроксимации результатов 11 решений. Указан интервал числа жесткости, в котором данная формула получена и может быть использована. Этот интервал равен $0.005 \leq V \leq 0.2$. Отметим, что интерес для практики представляет не менее чем на порядок более широкий интервал.

В работах [146, 147, 149, 150] предложен многосеточный метод решения УГД задачи. В качестве безразмерных переменных использовались параметры M и L , связанные с переменными V, G соотношениями: $2M^2V = 3\pi^2$, $ML^2 = 2\pi G^2$. В работе приведены четыре функции распределения давления, полученные при значениях $V \leq 0.59$. Функции имеют второй пик давления. Приведены графики зависимостей значения второго пика давления от параметра M при четырех значениях параметра L . Графики позволяют определить значение второго пика давления при значениях параметра $0.04 \leq V \leq 0.59$.

Приведенные выше численные решения стационарных УГД задач для линейного контакта при смазке ньютоновскими жидкостями получены при малых значениях параметра V , как правило, при значениях $V < 1$. Аналогичная ситуация имеет место и в работах [27, 37, 82, 128]. В работе [120] отдельно рассмотрены легко и тяжело нагруженные УГД контакты. Для тяжело нагруженных контактов приведены три численных решения, полученные при значениях параметров $G = 7$, $V = 0.2$, $V = 0.1$ и $V = 0.05$.

Кроме численных методов решения УГД задач рассматривались также асимптотические методы. М. А. Галахов, используя подход А. М. Эртеля и А. Н. Грубина, получил формулу $H_0 = 0.272(VG)^{0.75}$. При использовании данной формулы исходные данные должны удовлетворять условию $VG \ll 1$. Новые асимптотические решения получены в работах И. И. Кудиша и др. [40, 105, 120-124], А. И. Беспорточного [6-8] и в работе [29]. Обзор асимптотических методов решения УГД задач приведен в [131]. Область применения асимптотических решений ограничена условием $V \ll 1$.

Из приведенного обзора работ, посвященных стационарным УГД задачам для линейного внешнего контакта, следует, что имеющиеся в настоящее время численные решения УГД задач получены в узких интервалах числа жесткости в окрестностях двух предельных решений: решения задачи о контакте упругих тел при отсутствии смазочного слоя и решения ГД задачи смазки жестких тел.

Решения в интервале числа жесткости, необходимом для практических расчетов, отсутствуют. Кроме того, приведенные решения позволяют приближенно определить только минимальную толщину смазочного слоя. Решения для максимального давления в смазочном слое, в каком либо значимом интервале значений числа жесткости отсутствуют.

Объект исследования: гидродинамические узлы трения (подшипники скольжения, зубчатые передачи, роликовые подшипники качения).

Предмет исследования: Предметом исследования являются характеристики смазочного слоя (коэффициент трения, минимальная толщина смазочного слоя, максимальные давление и температура в смазочном слое) в тяжелонагруженных гидродинамических узлах трения в условиях деформаций поверхностей трения.

Целью работы является

- применительно к тяжелонагруженным подшипникам скольжения – разработка методики расчета гидродинамического подшипника скольжения в условиях высоких деформаций поверхностей трения и тепловых процессов, протекающих в подшипнике;
- применительно к гидродинамическим узлам трения с линейным локальным контактом – развитие методики расчета характеристик смазочного слоя в гидродинамических узлах трения в условиях упругих деформаций.

Достижение цели предполагает решение ряда задач:

1. Разработать уточненную математическую модель расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимальной температуры в

радиальном подшипнике скольжения жидкостного трения конечной длины с частичным углом охвата с учетом деформаций разделенных смазочным слоем поверхностей и тепловых процессов, протекающих в подшипнике.

2. Провести исследование влияния упругих деформаций в радиальных подшипниках с частичным углом охвата и в упорных подшипниках скольжения на несущую способность смазочного слоя. Найти закономерности, обусловленные этим влиянием.

3. Разработать методику расчета опор валков прокатных станов в интервале средней удельной нагрузки от 3 МПа до 26 МПа и при скоростях скольжения до 30 м/с.

4. Сопоставить результаты расчетов по разработанной методике с экспериментальными данными.

5. Разработать математическую модель радиального подшипника скольжения в реверсивном жидкостном режиме. Провести исследование влияния деформаций на период реверсивного движения.

6. Разработать методику расчета максимального давления и минимальной толщины смазочного слоя в локальном линейном контакте в интервале изменения коэффициента жесткости от одного предельного значения, соответствующему контакту упругих тел при отсутствии смазочного слоя, до другого предельного значения, соответствующему гидродинамическому контакту.

7. Исследовать влияние деформаций на высоту микронеровностей шероховатых поверхностей трения в области высоких давлений.

8. Разработать математическую модель процесса формирования смазочного слоя при движении из состояния покоя, учитывающую неньютоновские реологические свойства смазочного материала. Провести ее анализ.

Научная новизна диссертационного исследования:

1. Разработана математическая модель расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимальной температуры в радиальном подшипнике

скольжения с частичным углом охвата, в отличие от известных моделей учитывающая изменения температуры и упругих деформаций поверхностей трения. Предложен метод совместного численного решения уравнений контактных деформаций и движения смазочного слоя, расширяющий область применения упругогидродинамических (УГД) расчетов по модели по сравнению с известными: от малых деформаций при давлении до 1 МПа до высоких деформаций при давлении до 26 МПа, характерном для тяжело нагруженных крупногабаритных подшипников. Установлено, что:

- в зависимости от угла охвата (29), величины коэффициента податливости (α) и выявленного критерия ($H_{\min}$) (отношение минимальной толщины смазочного слоя к радиальному зазору) меняются параметры функционирования и несущая способность подшипника, а также область рационального применения модели. При угле охвата $2\pi/3$:
 - несущая способность является функцией коэффициента податливости α ;
 - при значении $H_{\min} = 0.1$ несущая способность повышается в два раза, а при $H_{\min} = 0.01$ более чем в 9 раз;
 - в интервале значений $0.01 \leq H_{\min} \leq 0.35$ и при значениях $\alpha \leq H_{\min} (0.053 + 0.336H_{\min} + 34.4H_{\min}^2 - 193H_{\min}^3 + 458H_{\min}^4)$ деформации можно не учитывать;
 - при значениях критерия $H_{\min} > 0.35$ расчеты следует выполнять без учета деформаций по гидродинамической (ГД) теории смазки;
 - при малой скорости скольжения ($u < 0.05u_0$, u_0 - максимальная скорость скольжения) в условиях реверсивного режима трения, форма зазора вследствие деформаций препятствует вытеканию из него смазочного материала, сохраняя

гидродинамический режим трения, а рассчитанный по модели максимальный период реверсивного жидкостного режима больше определенного по классической методике. Установлено, что:

- степень влияния деформаций на максимальный период реверсивного жидкостного режима определяется величиной критерия k (отношение максимального периода, полученного с учетом деформаций, к его значению, полученному без учета деформаций);
- величина критерия k зависит от коэффициента нагруженности ($B = W\Delta^2 / 6\mu_0 u_0 R^2$, W - нагрузка на единицу длины подшипника, R - радиус вала, μ_0 - вязкость смазочного материала, Δ - радиальный зазор), отношения критического значения минимальной толщины смазочного слоя к радиальному зазору ($H_{кр}$), и коэффициента податливости α ;
- при наиболее распространенных значениях $B = 2$, $H_{кр} = 0.06$ в интервале $0.01 < \alpha \leq 1$ значение k может быть определено по формуле $k = 0.58 + 46.4\alpha - 17.2\alpha^2$ и варьируется от 1.04 до 29.7.

(п. 4, 10 паспорта научной специальности 2.5.3)

2. Разработана математическая модель формирования смазочного слоя в локальном контакте при движении из состояния покоя с учетом упругости смазочного материала и упругих деформаций поверхностей трения, выявлены закономерности изменения максимального давления в смазочном слое от нагрузочной способности, геометрических размеров, скорости движения поверхностей и параметров смазочного материала. Установлено, что:

- упругие свойства смазочного материала способствуют повышению толщины формируемого смазочного слоя до полного разделения поверхностей, в дальнейшем не оказывая существенного влияния на процесс трения;

- в условиях $\mu_0 u R' E' / W^2 < 0.0042$ давление в смазочном слое близко к максимальному значению, как при отсутствии смазки (давление по Герцу), а в условиях $0.1 < \mu_0 u R' E' / W^2 < 0.24$ и $\alpha_p p_g > 17$ (α_p - коэффициент зависимости вязкости смазочного материала от давления, p_g - давление по Герцу) давление в смазочном слое выше давления по Герцу более чем в 1.6 раза.

Практическая значимость работы.

1. Разработанная методология расчета гидродинамических подшипников скольжения с учетом деформаций поверхностей трения позволяет на стадии проектирования определить предельную несущую способность подшипника в жидкостном режиме. Это подтверждается актом о ее внедрении для расчета подшипниковых узлов валков кольцепрокатного оборудования в АО «Русполимет» с годовым экономическим эффектом 2.3 миллиона рублей и актом о ее использовании для расчета рабочих характеристик смазочного слоя в опорах валков прокатных станов «SMS Siemag» в Инженерно-технологическом центре АО «Выксунский металлургический завод».

2. Разработанная методология расчета параметров линейного упруго-гидродинамического контакта позволяет на стадии проектирования производить уточненные расчеты нагрузочной способности зубчатых передач, роликовых подшипников качения и других узлов трения с линейным локальным контактом, работающих в гидродинамическом режиме. Это подтверждается актом о ее использовании в Центре разработки перспективных решений АО «ПО «Муроммашзавод» с целью уточненной оценки параметров контакта зубьев прямозубых цилиндрических зубчатых передач изделий «Колесный редуктор 4319-2601010, Планетарный редуктор АДФМ.123.00.000» на стадии проектирования с ожидаемым годовым экономическим эффектом 1.3 млн. рублей.

Методы диссертационного исследования. При построении математических моделей гидродинамических узлов трения использовались либо известные и широко используемые уравнения, или уравнения, которые получились путем строгого вывода. При построении математических модели радиального подшипника скольжения проводилась оценка влияния пренебрегаемых процессов в подшипнике на конечные результаты. При разработке численных алгоритмов реализации математических моделей гидродинамических узлов трения использовался аппарат математической теории численных методов.

Положения, выносимые на защиту, включают:

1. Математические модели радиальных подшипников скольжения жидкостного трения с частичным углом охвата с учетом деформаций поверхностей трения и тепловых процессов, протекающих в подшипниках.
2. Установленные закономерности в зависимостях несущей способности радиальных и упорных подшипников скольжения от конструктивных параметров, механических свойств контактирующих тел и реологических свойств смазочного материала.
3. Разработанную инженерную методику расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимальной температуры в тяжело нагруженных радиальных подшипниках скольжения с учетом деформаций поверхностей и тепловых процессов, протекающих в подшипнике.
4. Экспериментальное подтверждение теоретически разработанных моделей и результатов их численного анализа для радиальных тяжело нагруженных подшипников скольжения.
5. Результаты исследования реверсивного режима работы радиального подшипника скольжения с частичным углом охвата в условиях упругих деформаций.
6. Установленные закономерности в зависимостях характеристик локального линейного контакта (минимальной толщины смазочного слоя, максимального давления, коэффициента трения) от коэффициента жесткости.

7. Разработанную инженерную методику расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимального давления в локальном линейном контакте.
8. Результаты численного анализа процесса формирования смазочного слоя при движении из состояния покоя при смазке, обладающей вязкоупругими свойствами.

Личный вклад соискателя. Соискателем получены все результаты, составляющие научную новизну и практическую значимость работы, и положения, выносимые на защиту.

Достоверность и апробация научных результатов. Применительно к радиальным подшипникам скольжения достоверность полученных результатов основывается на хорошем совпадении результатов численных расчетов и результатов экспериментальных исследований крупногабаритных подшипников скольжения. Применительно к узлам трения с локальным линейным контактом трущихся поверхностей достоверность полученных результатов основывается на корректности постановок решаемых задач, строгости аналитических решений, совпадении полученных численных решений с известными решениями, совпадении предельных решений, полученных численными методами, с соответствующими аналитическими решениями, близости результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

Материалы диссертационной работы докладывались и обсуждались:

- на XIV международной научно-технической конференции «Трибология машиностроению 2022» (г. Москва, ИМАШ РАН, 2022 г.);
- на XIII международной научно-технической конференции «Трибология машиностроению» (г. Москва, ИМАШ РАН, 2020 г.);
- на VI международной научной конференции «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении» (г. Москва, ИМАШ РАН, 2019);

- на XII международной научно-технической конференции «Трибология машиностроению» (г. Москва, ИМАШ РАН, 2018 г.);
- на семинаре «Механика деформируемого твердого тела» (Москва, Институт Механики МГУ, 2017);
- на Международной научно-технической конференции «Полимерные композиты и трибология» (ПОЛИКОМТРИБ-2017, Гомель, Беларусь, 2017);
- на XI международной научно-технической конференции «Трибология машиностроению» (г. Москва, ИМАШ РАН, 2016 г.);
- на Международной научно-технической конференции «Механика и трибология транспортных систем» (г. Ростов-на-Дону, 2016 г.);
- на Международном научном симпозиуме «Гидродинамическая Теория Смазки XXXI» (г. Орел, 2016, 26-28 май);
- на 15th Nordic Symposium on Tribology (12 – 15 June, 2012, Trondheim, Norway)
- на XXXIX Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics”(St.Petersburg (Repino), 2011);
- на Советско - Американской конференции с международным участием «Новые материалы и технологии в трибологии» (Минск, Республика Беларусь, 1992 г.);
- на V Всесоюзной конференции «Контактная Гидродинамика (г. Самара, 1991 г);
- на Всесоюзной научно-технической конференции «Обеспечение надежности узлов трения машин» (г. Ворошиловград, 1988 г.)
- на Всесоюзной конференции «Трение и износ в машинах» (г. Челябинск, 1979 г.)

Публикации. По результатам проведенных исследований опубликована одна монография в соавторстве и 49 научных работ. Из них 21 научная работа опубликована в журналах из перечня ВАК, 12 научных работ, индексируемых в Scopus и Web of Science (10 из них являются переводными статьями статей из перечня ВАК), 12 статей в сборниках и трудах

международных конференций, 4 статьи в других изданиях. Без соавторов опубликовано 29 научных работ, в том числе 13 работ в журналах перечня ВАК и 6 статей в трудах международных конференций.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ПОДШИПНИКОВ ЖИДКОСТНОГО ТРЕНИЯ

Подшипник скольжения, как опора вращающегося вала, может работать в трех режимах трения, жидкостное трение, полужидкостное трение и полусухое трение. Жидкостное трение имеет место только при наличии между валом и подшипником постоянного слоя смазки, толщина которого не меньше допустимой величины. При полужидкостном трении сплошная масляная пленка между валом и втулкой отсутствует, и они соприкасаются на незначительных участках своими неровностями, что увеличивает трение в подшипнике.

Жидкостное трение в подшипниках скольжения может быть достигнуто использованием гидродинамических сил, возникающих при клинообразной форме смазочного слоя (гидродинамический принцип), либо с помощью гидростатического давления, уравнивающего рабочую нагрузку (гидростатический принцип).

По способу подачи смазочного материала радиальные гидродинамические подшипники скольжения жидкостного трения можно разделить на 2 группы: подшипники скольжения с полным углом охвата (с углом охвата 360°) и подшипники скольжения с частичным углом охвата.

В подшипниках с полным углом охвата (рис.1.1) смазка подается в зазор под небольшим давлением через отверстие. При вращении вала (цапфы, шипа) смазка, прилипая к его поверхности, благодаря вязкости вовлекается в зазор. То есть вал действует как насос, поддерживая непрерывную циркуляцию масла. Несущая часть смазочного слоя, т.е. та его часть, в которой развивается избыточное давление, будет располагаться в окрестности минимального зазора, причем протяженность несущей дуги в конфузорной части зазора будет значительно больше, чем в его диффузорной части.

Границы несущей части смазочного слоя зависят от расхода подаваемого смазочного материала и должны определяться при расчете подшипника.

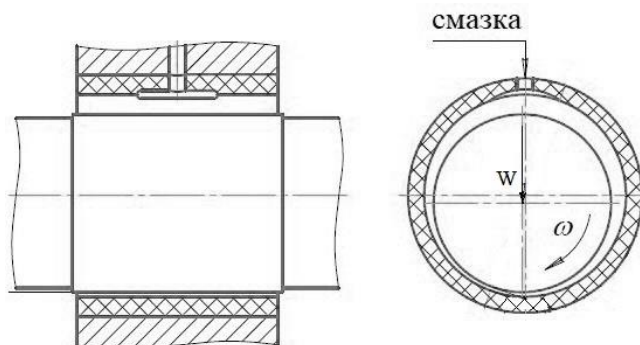


Рис. 1.1. Схема радиального гидродинамического подшипника скольжения с полным углом охвата.

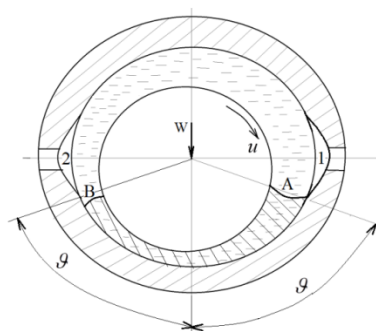


Рис. 1.2. Схема радиального подшипника с частичным углом охвата.

В подшипниках с частичным углом охвата (рис. 1.2) смазка подается под невысоким давлением во входной карман 1 и в выходной карман 2. При вращении вала смазка затягивается в зазор, в ней создается высокое давление и происходит интенсивное тепловыделение. Часть тепла, выделившегося в рабочей зоне подшипника, уходит в окружающие масло тела, а оставшаяся часть уносится из рабочей зоны маслом. При этом часть масла попадает в выходной карман 2, а другая часть вытекает из зазора через торцы.

В выходной карман 2 попадает разогретая смазка из рабочей зоны, а также подается охлажденная смазка под невысоким давлением при низкой температуре. Смазка перемешивается и дополнительно разогревается теплом, поступающим из разогретого вала. В нерабочей области, а также в области выходного кармана происходит отток тепла из вала в смазку, т. е. происходит

разогрев подаваемой смазки. Предполагается, что несущая часть смазочного слоя начинается на входной кромке входного кармана (точка А на рис. 1.1), а заканчивается либо, не доходя до выходного кармана (точка В на рис. 1.2), либо на входной кромке выходного кармана. Таким образом, в случае подшипника с частичным углом охвата входная координата несущей способности смазочного слоя задана, а выходная координата определяется в процессе решения задачи.

Как показали многочисленные исследования, при высоких скоростях и нагрузках на толщину смазочного слоя значительное влияние оказывают деформации поверхностей трения и тепловые процессы, протекающие в подшипнике. Поэтому для проектирования достаточно надёжных высокоскоростных и тяжело нагруженных опор скольжения необходимо при их расчёте точнее учитывать оба фактора.

Учет деформаций разделенных смазочным слоем тел в радиальном подшипнике скольжения производится, в основном, путем использования следующих двух расчетных схем.

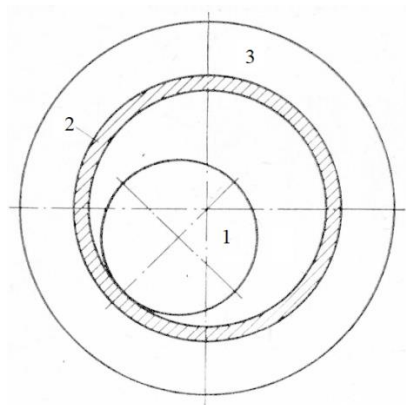


Рис. 1. 3. Схема неметаллического подшипника скольжения с полным углом охвата. 1 — жесткий вал, 2 — упругий кольцевой слой (вкладыш), 3 — жесткая обойма.

1) Контакт жесткого цилиндра и упругого кольцевого слоя, закрепленного в жесткой обойме (рис. 1.3). Эта схема применима к неметаллическим подшипникам скольжения, в которых модуль упругости неметаллического

вкладыша во много раз меньше модулей упругости вала и обоймы, где вкладыш закреплен. При высоком значении толщины вкладыша деформациями вала и обоймы можно пренебречь при определении толщины смазочного слоя с учетом деформаций тел.

2) Контакт упругого цилиндра и упругого кольца. При увеличении толщины кольца до бесконечности получается контакт упругого цилиндра и упругого пространства с цилиндрическим вырезом. Такую схему контакта можно применять, например, к следующим парам трения:

а) проушина шатуна — поршневой палец, головка шатуна — шейка коленчатого вала;

б) вал и вкладыш подшипника скольжения, где тонкий вкладыш закреплен в массивном корпусе, материал которого имеет те же упругие постоянные, что и материал вкладыша. В этом случае вкладыш и корпус можно считать одной деталью и моделировать ее пространством с цилиндрическим вырезом. Примером такого подшипника является опора валка прокатного стана. Обычно на внутреннюю поверхность стальной втулки — вкладыша гидродинамического подшипника скольжения заливается тонкий антифрикционный слой баббита. В подшипниках прокатных станов толщина этого слоя, как правило, на два порядка меньше радиуса вала, причем сам слой жестко связан с поверхностью вкладыша. Поэтому влиянием отличия жесткости слоя от жесткости материала вкладыша на деформацию вкладыша можно пренебречь и считать, что слой имеет те же упругие постоянные, что и вкладыш;

в) ось и колесо, напрессованное на ось. Ось моделируется цилиндром, а колесо — упругим кольцом.

При точном учёте деформаций тел и тепловых процессов расчёт гидродинамического подшипника скольжения заключается в совместном решении уравнений теории упругости для вала и вкладыша, уравнений гидродинамики для смазочного слоя, уравнений энергии для несущего слоя и

окружающих его тел, а также уравнения, связывающего вязкость масла с температурой и давлением. Эти уравнения представляют собой систему уравнений разного типа относительно четырёх неизвестных функций, какими являются толщина смазочного слоя с учетом деформаций тел, гидродинамическое давление, температура в смазочном слое, а также вязкость масла. При этом уравнения гидродинамики и энергии для смазочного слоя являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных.

Решение данной системы уравнений представляет большие математические трудности. Этим объясняется то, что до настоящего времени отсутствуют достаточно точные расчётные методики, учитывающие одновременно деформации поверхностей трения и уточнённые тепловые соотношения.

В данной главе изложена новая методика расчета опор скольжения жидкостного трения, с учетом деформаций разделенных смазочным слоем поверхностей. Приведено исследование влияния деформаций тел и тепловых процессов на несущую способность смазочного слоя. Использование новой методики расчёта подшипников жидкостного трения, учитывающей факторы, существенно влияющие на точность расчёта тяжело нагруженных и высокоскоростных опор, позволит проектировать более надёжные и экономичные опоры.

1.1. Внутренний гидродинамический контакт жестких цилиндров

Предельными случаями задачи о смазке деформируемых тел являются задачи о смазке жестких тел и задачи о контакте деформируемых тел при отсутствии смазки. Исследование данных предельных задач представляет определенный интерес, так как их решения могут быть использованы при определенных

условиях для расчета проектируемых узлов трения. Кроме того, решения задач теории смазки деформируемых тел при предельных переходах должны переходить в решения указанных задач, что может быть использовано для проверки точности получаемых решений.

Плоская задача о течении вязкой жидкости между двумя эксцентричными цилиндрическими поверхностями рассматривалась Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным [28], М. А. Галаховым [12] и др. Однако приведенное в этих работах решение позволяет эффективно производить расчет только для подшипников скольжения с полным углом охвата. Расчет подшипников скольжения с частичным углом охвата с помощью выражений, приведенных в [28], вызывает затруднение, так как в этом случае необходимо решать нелинейное алгебраическое уравнение, что можно сделать графически, или с помощью итераций. Приведем решение задачи, с помощью которого можно производить расчет подшипников скольжения, как с полным, так и с частичным углом охвата [14].

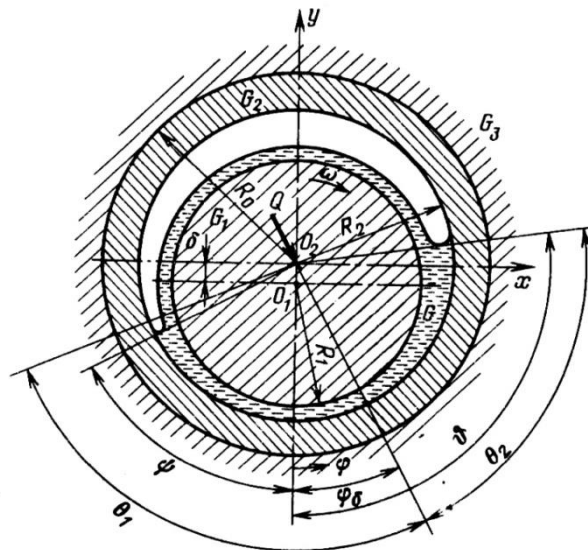


Рис. 1.4.

Выберем в качестве криволинейной системы координат полярные координаты, направив полярную ось по вектору $\vec{e} = O_1O_2$, взяв в качестве полюса точку O_2 , и отсчитывая угол φ в направлении, противоположном

вращению вала (рис. 1.4). Пусть вал вращается с угловой скоростью ω , а цилиндр G_2 (вкладыш, головка шатуна, подушка) неподвижен.

Уравнение Рейнольдса для данной задачи имеет вид

$$\frac{d}{d\varphi} \left(h^3 \frac{dp}{d\varphi} \right) = -6\mu\omega R_1^2 \frac{dh}{d\varphi} \quad (1.1)$$

где $h = \Delta(1 - \lambda \cos \varphi)$, $\lambda = \varepsilon/\Delta$. Если смазочный слой не полностью заполняет зазор подшипника, то обозначим ψ и ϑ ($\psi < \vartheta$) координаты выходной и входной границ смазочного слоя соответственно. Найдем решение уравнения (1.1) при условиях $p(\psi) = p(\vartheta) = 0$

Введем безразмерные переменные $H = h/\Delta$, $q = p/p_0$, $p_0 = 6\mu\omega R_1^2 \Delta^{-2}$. В безразмерных переменных уравнение и условия имеют вид

$$\frac{d}{d\varphi} \left(H^3 \frac{dq}{d\varphi} \right) = -\frac{dH}{d\varphi}, \quad H = 1 - \lambda \cos \varphi, \quad p(\psi) = p(\vartheta) = 0.$$

Интегрируя, имеем

$$\frac{dq}{d\varphi} = -\frac{H - H_0}{H^3} = \lambda \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_0}{(1 - \lambda \cos \varphi)^3} \quad (1.2)$$

Здесь H_0 - значение H в точке φ_0 , где $dq(\varphi_0)/d\varphi = 0$. Угол φ_0 всегда можно выбрать в интервале $(0, \pi)$, так как если при $\varphi_0^* \in (\pi, 2\pi)$ производная $dq(\varphi_0^*)/d\varphi = 0$, то в соответствии с (1.2) и при $\varphi_0 = 2\pi - \varphi_0^* \in (0, \pi)$ выполняется условие $dq(\varphi_0)/d\varphi = 0$. В дальнейшем φ_0 будет обозначать точку интервала $(0, \pi)$

Наряду с переменной φ будем использовать переменную Зоммерфельда $\chi = \chi(\varphi)$, связанную с φ соотношениями

$$\varphi = \varphi(\chi) = \int_0^\chi \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{1 + \lambda \cos \tau} d\tau$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2} \sin \chi}{1 + \lambda \cos \chi}, \quad \cos \varphi = \frac{\lambda + \cos \chi}{1 + \lambda \cos \chi} \quad (1.3)$$

Нетрудно проверить, что

$$\sin \chi = \frac{\sqrt{1-\lambda^2} \sin \varphi}{1-\lambda \cos \varphi}, \quad \cos \chi = \frac{\cos \varphi - \lambda}{1-\lambda \cos \varphi}$$

$$\chi(\varphi + 2\pi n) = 2\pi n + \chi(\varphi), \quad \varphi(\chi + 2\pi n) = 2\pi n + \varphi(\chi),$$

$$\chi(\pi n) = \pi n, n = 0, \pm 1, \dots; \chi_1 + \chi_2 = 2\pi, \quad \text{если } \varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi. \quad \text{Если } \tilde{q}(\chi) = q(\varphi(\chi)), \quad \text{то}$$

уравнение (1.2) для $\tilde{q}(\chi)$ как функции от переменной χ записывается в виде

$$\frac{d\tilde{q}}{d\chi} = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}} \frac{1+\lambda \cos \chi}{1+\lambda \cos \chi_0} (\cos \chi - \cos \chi_0) \quad (1.4)$$

где $\chi_0 = \chi(\varphi_0)$, $0 \leq \chi_0 \leq \pi$. Обозначим $\chi_1 = \chi(\psi)$, $\chi_2 = \chi(\vartheta)$. Интегрируя уравнение

(1.4) при условии $\tilde{q}(\chi_1) = 0$, получаем

$$\tilde{q}(\chi) = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2} (1+\lambda \cos \chi_0)} [F(\chi) - F(\chi_1)], \quad (1.5)$$

где

$$F(\chi) = \chi \left(\frac{\lambda}{2} - \cos \chi_0 \right) + (1 - \lambda \cos \chi_0) \sin \chi + \frac{\lambda}{4} \sin 2\chi$$

Принимая в равенстве (1.5) $\chi = \chi_2$ и учитывая, что $\tilde{q}(\chi_2) = 0$, получаем уравнение

$$F(\chi_1) - F(\chi_2) = 0, \quad (1.6)$$

позволяющее определить χ_2 , если известны значения χ_1 и χ_0 .

В подшипнике с полным углом охвата в месте обрыва смазочного слоя $dq(\psi)/d\psi = 0$, откуда

$$d\tilde{q}/d\chi = 0. \quad (1.7)$$

В подшипнике с частичным углом охвата либо выполняется (1.7), если смазочный слой обрывается не доходя до выходной кромки вкладыша, либо $dq(\psi)/d\varphi \geq 0$, откуда

$$d\tilde{q}(\chi_1)/d\chi \geq 0, \quad (1.8)$$

если смазочный слой обрывается на выходной кромке вкладыша. Из (1.4), (1.7) и (1.8) следует, что $-\chi_0 \leq \chi_1 < \chi_0$, причем $\chi_1 > -\chi_0$ только в том случае, когда смазочный слой обрывается на выходной кромке вкладыша.

Рассмотрим (1.6), считая χ_1 и χ_0 известными. Производная $dF(\chi)/d\chi = a(\cos \chi - \cos \chi_0)$ где $a > 0$, поэтому в точках $\chi = \pm\chi_0 + 2\pi n (n = 0, \pm 1, \dots)$ функция $F(\chi)$ имеет экстремум. Нетрудно проверить, что в точках $\chi = \chi_0 + 2\pi n (n = 0, \pm 1, \dots)$ функция $F(\chi)$ имеет максимум, а в точках $\chi = -\chi_0 + 2\pi n$ - минимум. Имеем $F(2\pi + \chi) = 2\pi(\lambda/2 - \cos \chi_0) + F(\chi)$. Отсюда следует, что

$$F(2\pi - \chi_0) = F(-\chi_0) \text{ при } \cos \chi_0 = \lambda/2 \text{ и } F(2\pi - \chi_0) > F(-\chi_0) \text{ при } \cos \chi_0 < \lambda/2.$$

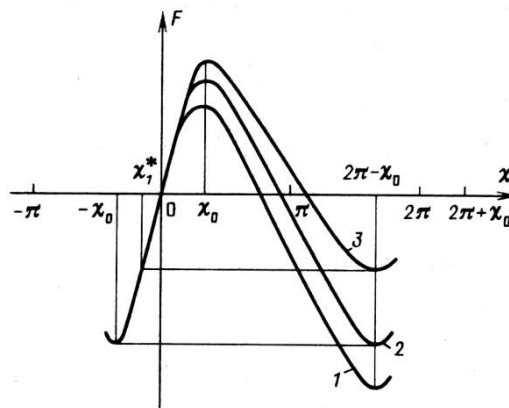


Рис. 1.5.

График $F(\chi)$ схематично изображен на рис. 1.5. Кривая 1 на рис. 1.5 соответствует $\chi_0 < \arccos(\lambda/2)$, кривая 2 — $\chi_0 = \arccos(\lambda/2)$, а кривая 3 — $\chi_0 > \arccos(\lambda/2)$.

Из рис. 1.5 следует, что при $\chi_0 \leq \arccos(\lambda/2)$ уравнение (1.6) имеет единственное решение относительно χ_2 в интервале $(\chi_0, 2\pi - \chi_0)$ при любом $-\chi_0 \leq \chi_1 < \chi_0$. При $\chi_1 = -\chi_0$ выполняется условие $d\tilde{q}(\chi_1)/d\chi = 0$. При $\chi_0 = \arccos(\lambda/2)$ и $\chi_1 = -\chi_0$ имеет место равенство $\chi_2 = 2\pi - \chi_0$, т.е. $\chi_2 - \chi_1 = 2\pi$. Таким образом, значениям $\chi_0 = \arccos(\lambda/2)$, $\chi_1 = -\chi_0$ соответствует полное заполнение зазора смазочным слоем. При этом точка $\chi = -\chi_0$ является точкой минимума функций $\tilde{q}(\chi)$, а точка $\chi = \chi_0$ — точкой максимума. При выполнении условия $\chi_0 < \arccos(\lambda/2)$ справедливо неравенство $\chi_2 - \chi_1 < 2\pi$ при

любом значении $-\chi_0 \leq \chi_1 < \chi_0$, т.е. смазочный слой частично заполняет рабочий зазор.

Значения $\chi_0 < \arccos(\lambda/2)$, $\chi_1 = -\chi_0$ могут реализовываться либо в подшипнике с полным углом охвата при частичном заполнении зазора смазочным материалом, либо в подшипнике с частичным углом охвата при обрыве смазочного слоя, не доходя до выходной кромки вкладыша. Значения $\chi_0 < \arccos(\lambda/2)$, $-\chi_0 < \chi_1 < \chi_0$ могут реализовываться только в подшипнике с частичным углом охвата при обрыве смазочного слоя на выходной кромке вкладыша.

Из рис. 1.5 следует, что при $\arccos(\lambda/2) < \chi_0 < \pi$ уравнение (1.6) имеет единственное решение относительно χ_2 в интервале $(\chi_0, 2\pi - \chi_0)$, если $\chi_1^* \leq \chi_1 < \chi_0$, где χ_1^* – корень уравнения $F(2\pi - \chi_0) - F(\chi_1^*) = 0$, лежащий в интервале $(-\chi_0, \chi_0)$.

Эти значения χ_0 и χ_1 могут реализовываться только в подшипнике с частичным углом охвата при обрыве смазочного слоя на выходной кромке вкладыша.

При $\chi_0 = \arccos(\lambda/2)$ и $\chi_1 = -\chi_0$ выражение (1.5) принимает вид

$$\tilde{q}(x) = \frac{2\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}(2+\lambda^2)} \left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right)^{3/2} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \sin \chi + \frac{\lambda}{2} \sin \chi \cos \chi \right]$$

Переходя от χ к φ , получаем

$$q(\varphi) = \frac{\lambda}{2+\lambda^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{4-\lambda^2}{1-\lambda^2} \right)^{3/2} + \frac{\sin \varphi (2-\lambda \cos \varphi)}{(1-\lambda \cos \varphi)^2} \right],$$

т.е. распределение гидродинамического давления в смазочном слое для подшипника с полным углом охвата при полном заполнении зазора смазочным материалом (ср. [12]).

Проекция на ось O_1y результирующей сил давления, отнесённой к единице длины вала, равна

$$W_y = R_1 \int_{\psi}^g p(\varphi) \cos \varphi d\varphi = -R_1 \int_{\psi}^g \sin \varphi \frac{dp}{d\varphi} d\varphi = 6 \frac{\mu \omega R_1^3}{\Delta^2} B_y \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} B_y &= -\sqrt{1-\lambda^2} \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{\sin \chi}{1+\lambda \cos \chi} \frac{dq}{d\chi} d\chi = \\ &= \frac{\lambda}{2(1-\lambda^2)(1+\lambda \cos \chi_0)} (2 \cos \chi_0 - \cos \chi_1 - \cos \chi_2) (\cos \chi_1 - \cos \chi_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

а проекция на ось O_1x дает

$$W_x = -R_1 \int_{\psi}^g p(\varphi) \sin \varphi d\varphi = -R_1 \int_{\psi}^g \cos \varphi \frac{dp(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = -6 \frac{\mu \omega R_1^3}{\Delta^2} B_x \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} B_x &= \int_{\chi_1}^{\chi_2} \frac{\lambda + \cos \chi}{1+\lambda \cos \chi} \frac{dq}{d\chi} d\chi = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2} (1+\lambda \cos \chi_0)} \times \\ &\times \left[\left(\frac{1}{2} - \lambda \cos \chi_0 \right) (\chi_2 - \chi_1) + (\lambda - \cos \chi_0) (\sin \chi_2 - \sin \chi_1) + \frac{1}{4} (\sin 2\chi_2 - \sin 2\chi_1) \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Проекция на оси x и y результирующей сил трения имеют порядок $W_x \Delta / R_1$ и $W_y \Delta / R_1$, поэтому в уравнении равновесия вала ими пренебрегают. Из (1.6), (1.9) - (3.12) получаем выражение для угла между линией действия нагрузки и линией, проходящей через центры окружностей на рис. 1.5:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\delta} = -\frac{W_x}{W_y} = 2 \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} \frac{(\chi_2 - \chi_1) \cos \chi_0 - (\sin \chi_2 - \sin \chi_1)}{(2 \cos \chi_0 - \cos \chi_1 - \cos \chi_2) (\cos \chi_1 - \cos \chi_2)} \quad (1.13)$$

При $\chi_1 = \chi_0 = \arccos(\lambda/2)$, $\chi_2 = 2\pi - \chi_0$ выражения (1.10), (1.12) и (1.13) принимают вид

$$B_y = 0, \quad B_x = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}(2+\lambda^2)}, \quad \varphi_{\delta} = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что в подшипнике с полным углом охвата и зазором, полностью заполненным смазочным материалом, смещение оси вала относительно оси подшипника происходит перпендикулярно приложенной нагрузке. Приведенных выражений недостаточно для определения χ_1, χ_0 и χ_2 при частичном заполнении зазора смазочным материалом. Дополнительные

условия зависят от конструкции подшипника. В подшипнике с полным углом охвата задают коэффициент заполнения зазора $\Lambda = V_0 / (2\pi RL\Delta)$, где V_0 – объем жидкости между цилиндрами, L – длина подшипника. Полагая, что весь смазочный материал, попадающий из рабочей области в нерабочую область, переносится валом на вход рабочей области, получаем

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{\vartheta} H(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} H(\psi) [2\pi - (\vartheta - \psi)] = \\ &= \frac{1}{2\pi} [(\vartheta - \varphi) - \lambda(\sin \vartheta - \sin \psi)] + \frac{1}{2} (1 - \lambda \cos \psi) (2\pi - \vartheta + \psi).\end{aligned}\quad (1.14)$$

При заданном значении $\Lambda \leq 1$ уравнения (1.6), (1.14) и условие $\chi_1 = -\chi_0$ позволяют определить χ_1, χ_0 и χ_2 . Отметим, что при $\Lambda = 1$ будет справедливо равенство $-\chi_1 = \chi_0 = \arccos(\lambda/2)$, а $\chi_2 = 2\pi + \chi_1$.

В подшипнике с частичным углом охвата заданы координаты выходной ($-\theta_1$) и входной (θ_2) кромок вкладыша, отсчитываемые от линии действия нагрузки (рис. 1.5). Пусть смазочный слой начинается на входной кромке. Из определения ϑ, θ_2 и φ_δ следует, что $\theta_2 = \vartheta - \varphi_\delta$ (см. рис. 1.5). Выражая φ_δ через χ_0, χ_1 и χ_2 с помощью (1.13), а ϑ через χ_2 из (1.3), получаем

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \text{Arctg} \left(\sqrt{1 - \lambda^2} \frac{\sin \chi_2}{\lambda + \cos \chi_2} \right) - \\ &- \text{Arctg} \left[2 \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda} \frac{(\chi_2 - \chi_1) \cos \chi_0 - (\sin \chi_2 - \sin \chi_1)}{(2 \cos \chi_0 - \cos \chi_1 - \cos \chi_2)(\cos \chi_1 - \cos \chi_2)} \right].\end{aligned}\quad (1.15)$$

Данное уравнение совместно с (1.6), а также условием $\chi_1 = -\chi_0$, если смазочный слой обрывается, не доходя до выходной кромки, или условием $\varphi_\delta(\chi_0, \chi_1, \chi_2) - \psi(\chi_1) = \theta_1$, если он обрывается на выходной кромке, позволяет определить χ_0, χ_1 и χ_2 , после чего по (1.10) и (1.12) можно вычислить B_y, B_x и несущую способность смазочного слоя, отнесенную к единице длины подшипника: $W = 6\mu\omega R_1^3 \sqrt{B_x^2 + B_y^2} / \Delta^2$. Рассмотрим эту процедуру более подробно.

Пусть задана минимальная толщина смазочного слоя $h_{\min}$. Расчет подшипника с частичным углом охвата проводим в следующем порядке:

- 1) определяем $\lambda = 1 - h_{\min} / \Delta$;
- 2) подставляем в уравнения (1.15) и (1.6) $\chi_1 = -\chi_0$ и решаем полученную систему уравнений относительно χ_0 и χ_2 ;
- 3) по формулам (1.3) и (1.13) определяем ψ , φ_δ и ϑ ;
- 4) проверяем условие $\psi_\delta - \psi < \theta_1$. Если оно выполняется, то смазочный слой обрывается, не доходя до кромки выходного кармана. По формулам (1.10) и (1.12) определяем B_x и B_y . Если последнее условие не выполняется, то смазочный слой обрывается на кромке, причём $dp(\varphi)/d\varphi > 0$. В этом случае для определения χ_1, χ_0 и χ_2 решаем систему трех уравнений: (1.6), $\vartheta(\chi_2) - \varphi_\delta(\chi_1, \chi_2, \chi_0) = \theta_2$ и $\varphi_\delta(\chi_1, \chi_2, \chi_0) - \psi(\chi_1) = \theta_1$.

Расчет подшипника в случае обрыва смазочного слоя, не доходя до кромки выходного кармана можно производить графически, используя семейства кривых, приведенных на рис. 1.6 и рис. 1.7.

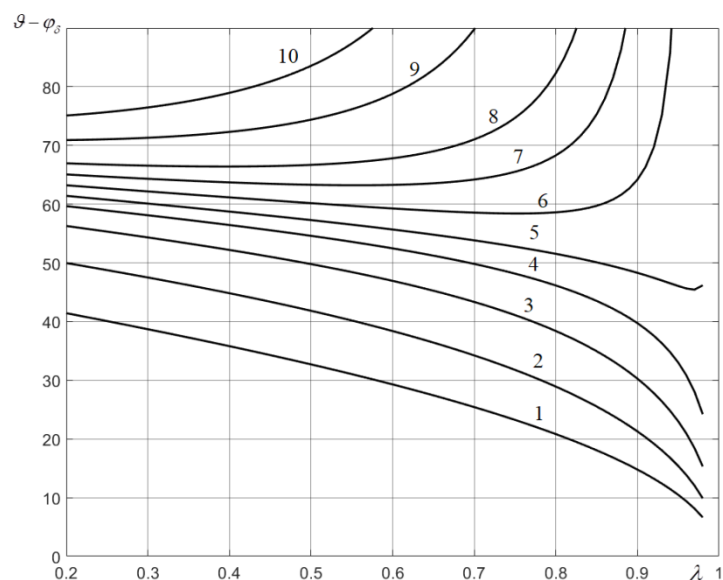


Рис. 1.6. Зависимости $\vartheta - \varphi_\delta$ от λ при различных значениях χ_0 . Кривая 1 - $\chi_0 = 38^\circ$, 2 - $\chi_0 = 44^\circ$, 3 - $\chi_0 = 48^\circ$, 4 - $\chi_0 = 50^\circ$, 5 - $\chi_0 = 51^\circ$, 6 - $\chi_0 = 52^\circ$, 7 - $\chi_0 = 53^\circ$, 8 - $\chi_0 = 54^\circ$, 9 - $\chi_0 = 56^\circ$, 10 - $\chi_0 = 58^\circ$

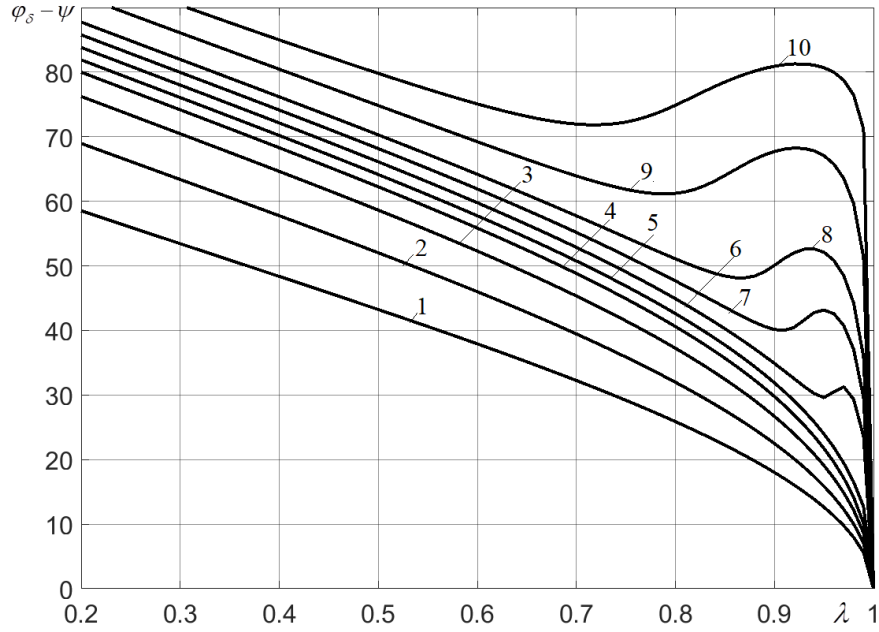


Рис. 1.7. Зависимости $\varphi_\delta - \psi$ от λ при различных значениях χ_0 . Кривая 1 - $\chi_0 = 38^\circ$, 2 - $\chi_0 = 44^\circ$, 3 - $\chi_0 = 48^\circ$, 4 - $\chi_0 = 50^\circ$, 5 - $\chi_0 = 51^\circ$, 6 - $\chi_0 = 52^\circ$, 7 - $\chi_0 = 53^\circ$, 8 - $\chi_0 = 54^\circ$, 9 - $\chi_0 = 56^\circ$, 10 - $\chi_0 = 58^\circ$

На рис. 1.6 приведены графики зависимостей $\theta_2 = \vartheta - \varphi_\delta$ от относительного эксцентриситета λ при различных значениях χ_0 . Значение θ_2 при заданных значениях λ и χ_0 определялось следующим образом. Принималось $\chi_1 = -\chi_0$ и решалось уравнение (1.6) относительно χ_2 . После этого определялось

$\vartheta = \arccos\left(\frac{\lambda + \cos \chi_2}{1 + \lambda \cos \chi_2}\right)$ и по формуле (1.13) определялось φ_δ . На рис. 1.7

приведены графики зависимостей $\varphi_\delta - \psi$ от относительного эксцентриситета λ при различных значениях χ_0 . Значение ψ определялось по формуле

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2} \sin \chi_1}{1 + \lambda \cos \chi_1}\right).$$

Задавая λ и $\theta_2 = \vartheta - \varphi_\delta$ по графикам на рис. 1.6 находим χ_0 . Задавая

$\chi_1 = -\chi_0$, находим $\psi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2} \sin \chi_1}{1 + \lambda \cos \chi_1}\right)$. С помощью графиков на рис. 1.7

находим $\varphi_\delta - \psi$. Проверяем условие $\varphi_\delta - \psi < \theta_1$.

Если оно выполняется, вычисляем $\varphi_\delta = (\varphi_\delta - \psi) + \psi$, $\vartheta = \theta_2 + \varphi_\delta$. Используя (1.3), находим χ_2 . По формулам (1.10) и (1.12) определяем B_x и B_y .

Приведем пример расчета с использованием приведенных графиков. Пусть $H_{\min} = 0.03$, $\lambda = 1 - H_{\min} = 0.97$, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/3$. По графикам на рис. 1.6 находим, что значение χ_0 расположено в интервале $(51^\circ < \chi_0 < 52^\circ)$, но ближе к левой границе. Принимаем $\chi_0 = 51.3^\circ = 0.895 \text{ рад}$. Принимаем $\chi_1 = -\chi_0 = -0.895 \text{ рад}$ и находим $\psi = -0.1183$. По графикам на рис. 1.7 находим $\varphi_\delta - \psi \approx 20^\circ = 0.35$. Условие $\varphi_\delta - \psi < \theta_1$ выполняется, т. е. смазочный слой обрывается, не доходя до выходного кармана. Находим $\varphi_\delta = 0.35 - 0.1183 = 0.2317$, $\vartheta = \pi/3 + 0.2317 = 1.279$. Вычисляем $\sin \chi_2 = \frac{\sqrt{1-\lambda^2} \sin \vartheta}{1-\lambda \cos \vartheta} = 0.323$, $\cos \chi_2 = \frac{\cos \vartheta - \lambda}{1-\lambda \cos \vartheta} = -0.946$, $\chi_2 = 2.813$. По формулам (1.10), (1.12) определяем $B_x = 3.168$, $B_y = 12.62$, $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 13.01$. Точный расчет путем решения системы уравнений (1.6), (1.15) дает $B_x = 3.13$, $B_y = 12.64$, $B = 13.02$. Точное значение B отличается от приближенного в четвертой значащей цифре.

1.2. Деформации тонкого вкладыша в неметаллическом радиальном подшипнике скольжения.

Выразим напряжения во вкладыше через функцию напряжений $\Psi(r, \varphi)$ в полярной системе координат $(Or\varphi)$ [48]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \quad (1.16)$$

и деформации через напряжения и перемещения для плоского деформированного состояния

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_r - \nu(1+\nu) \sigma_\varphi \right], \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_\varphi - \nu(1+\nu) \sigma_r \right] \quad (1.17)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial^2 u_r(r, \varphi)}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (1.18)$$

где E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона материала вкладыша, u_r и u_φ - радиальное и окружное упругие перемещения соответственно.

Разложим $\Psi(r, \varphi)$ в ряд Тейлора по степеням $\rho = r - R$, где R - внутренний радиус вкладыша

$$\Psi(r, \varphi) = \Psi_0(\varphi) + \rho \Psi_1(\varphi) + \rho^2 \Psi_2(\varphi) + \dots \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в (1.16), получим

$$\sigma_r = \frac{\Psi_1}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \Psi_0}{d\varphi^2} + O\left(\frac{\rho}{R}\right), \quad \sigma_\varphi = 2\Psi_2 + O\left(\frac{\rho}{R}\right) \quad (1.20)$$

Из (1.20), (1.17) после интегрирования найдем

$$\begin{aligned} Eu_r(\rho, \varphi) &= \int_0^\rho \left[(1-\nu^2) \sigma_r - \nu(1+\nu) \sigma_\varphi \right] (\xi) d\xi + f(\varphi) = \\ &= \frac{\rho}{R} (1-\nu^2) \Psi_1 + \frac{\rho}{R^2} (1-\nu^2) \frac{d^2 \Psi_0}{d\varphi^2} - 2\nu(1+\nu) \rho \Psi_2 + f(\varphi) + O\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right], \end{aligned}$$

где $f(\varphi)$ - некоторая функция. Ее определим из условия отсутствия перемещений на внешнем контуре кольца

$$f(\varphi) = -\frac{\varepsilon}{R} (1-\nu^2) \Psi_1 - \frac{\varepsilon}{R^2} (1-\nu^2) \frac{d^2 \Psi_0}{d\varphi^2} + 2\nu(1+\nu) \varepsilon \Psi_2 + f(\varphi) + O\left[\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2\right] \quad (1.21)$$

где ε - толщина вкладыша.

Из (1.18) следует, что при отсутствии перемещений на внешнем контуре кольца деформации $\varepsilon_\varphi(\varepsilon, \varphi) = 0$. Отсюда и из (1.17) следует, что

$\sigma_\varphi(\varepsilon, \varphi)(1-\nu^2) = \nu(1+\nu) \sigma_r(\varepsilon, \varphi)$. Подставляя в последнее равенство выражения (1.20), получаем

$$2(1-\nu^2) \Psi_2(\varphi) = \nu(1+\nu) \left[\frac{\Psi_1}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \Psi_0}{d\varphi^2} \right] + O\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) \quad (1.22)$$

Из (1.21) и (1.22) следует, что

$$Eu_r(\rho, \varphi)|_{\rho=0} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \varepsilon \left[\frac{\Psi_1}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \Psi_0}{d\varphi^2} \right] + O\left[\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2\right] \quad (1.23)$$

На внутреннем контуре кольца $\sigma_r(\rho, \varphi)|_{\rho=0} = -p(\varphi)$, что с учетом (1.20)

приводит к соотношению

$$p(\varphi) = -\frac{\Psi_1}{R} - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \Psi_0}{d\varphi^2} + O\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) \quad (1.24)$$

Из (1.23) и (1.24) следует, что в первом приближении по ε/R

$$u_r(\varphi) = \varepsilon \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} p(\varphi) \quad (1.25)$$

т. е. радиальное перемещение пропорционально давлению. В этом смысле тонкий кольцевой упругий слой является средой Винклера [10].

1.3. Неметаллический радиальный подшипник скольжения.

В нематаллическом подшипнике скольжения можно пренебречь деформациями вала и корпуса, а учитывать только деформации нематаллического вкладыша, имеющего малый модуль упругости. Данное предположение можно использовать при выполнении условий

$$\frac{\varepsilon}{R} \gg \frac{E}{E_k},$$

где ε - толщина вкладыша, E , E_ε и E_k - модули упругости соответственно материалов вкладыша, вала и корпуса. Действительно, упругое перемещение точки поверхности вала w_ε пропорционально радиусу вала R и обратно пропорционально модулю упругости вала E_ε , т.е. $w_\varepsilon \sim R/E_\varepsilon$. Аналогично упругое перемещение точки поверхности корпуса $w_k \sim (R_1 + \varepsilon)/E_k$, а упругое перемещение точки на поверхности вкладыша $w \sim R_1/E$. Приведенное выше

условие следует из условий $w_k \ll w$, $w_\epsilon \ll w$, $\epsilon/R \ll 1$, которые и означают, что деформациями корпуса и вала можно пренебречь.

Пусть смазочный слой разделяет поверхности жесткого цилиндра (вала) и тонкого упругого кольцевого слоя, закрепленного в жестком корпусе. Систему координат выбираем такую же, как в пункте 1.1. Распределение гидродинамического давления определяется из уравнения (1.1), где $h = \Delta(1 - \lambda \cos \varphi) + u_r(\varphi)$, $u_r(\varphi)$ – радиальное перемещение точек, расположенных на внутренней поверхности слоя. Оно определяется по формуле (1.25). В безразмерных переменных, определенных по формулам $H = h/\Delta$, $q = p/p_0$, $p_0 = 6\mu\omega R_1^2 \Delta^{-2}$, задача заключается в решении уравнений

$$\frac{d}{d\varphi} \left(H^3 \frac{dq}{d\varphi} \right) = -\frac{dH}{d\varphi} \quad (1.26)$$

$$H = 1 - \lambda \cos \varphi + \alpha q \quad (1.27)$$

при соответствующих краевых условиях. Здесь $\alpha = 6 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\mu\omega \epsilon R^2}{E\Delta^3}$.

Переменную α назовем числом податливости.

Метод численного решения. Изложим метод решения системы уравнений (1.26), (1.27) при условиях

$$q(\psi) = 0, \quad \frac{dq}{d\varphi}(\psi) = \Pi \quad (1.28)$$

где переменные $\psi \in (-\pi, 0)$ и $\Pi \geq 0$ заданы. После этого укажем, как, зная решение задачи (1.26) - (1.28), проводить расчет подшипников скольжения с частичным или с полным углом охвата.

Из условий $H > 0$, $q(\psi) = 0$ и (1.27) следует, что

$$1 - \lambda \cos \psi > 0, \quad \text{или } \psi < -\arccos(1/\lambda) \text{ при } \lambda \geq 1. \quad (1.29)$$

Интегрируя уравнение (1.26) и учитывая (1.27), (1.28), получаем

$$(1 - \lambda \cos \varphi + \alpha q)^3 \frac{dq}{d\varphi} + \alpha q = C + \lambda(\cos \varphi - \cos \psi) \quad (1.30)$$

где $C = (1 - \lambda \cos \psi)^3 \Pi$. В силу (1.29) и $\Pi \geq 0$ имеем $C \geq 0$. Заменим (1.30) конечно-разностным уравнением

$$(1 - \lambda \cos \varphi_j + \alpha q_j)^3 (q_j - q_{j-1}) + \alpha q_j \Delta \varphi = C \Delta \varphi + \lambda \Delta \varphi (\cos \varphi_j - \cos \psi) \quad (1.31)$$

где $q_j = q(\varphi_j)$, $q_{j-1} = q(\varphi_{j-1})$, $\Delta \varphi = \varphi_j - \varphi_{j-1}$, φ_j – узлы неравномерной сетки $\{\varphi_j\}$ ($j=1, 2, \dots, N$), $\varphi_1 = \psi$, $\varphi_N = 2\pi + \psi$, введенной на отрезке $[\psi, 2\pi + \psi]$,

Обозначив $q_j - q_{j-1} = x$, перепишем (1.31) в виде

$$(a_j + \alpha x)^3 x = A_j - bx \quad (1.32)$$

где

$$a_j = 1 - \lambda \cos \varphi_j + \alpha q_{j-1}, \quad b = \alpha \Delta \varphi, \quad A_j = C \Delta \varphi + \lambda \Delta \varphi (\cos \varphi_j - \cos \psi) - \alpha \Delta \varphi q_{j-1}. \quad (1.33)$$

Покажем, что уравнение (1.32) имеет хотя бы одно решение, при котором $H_j = 1 - \lambda \cos \varphi_j + \alpha q_j > 0$. Для этого положим $F_1(x) = (a_j + \alpha x)^3 x$, $F_2(x) = A_j - bx$ и рассмотрим отдельно случаи $a_j > 0$, $a_j < 0$ и $a_j = 0$. Отметим, что $b > 0$.

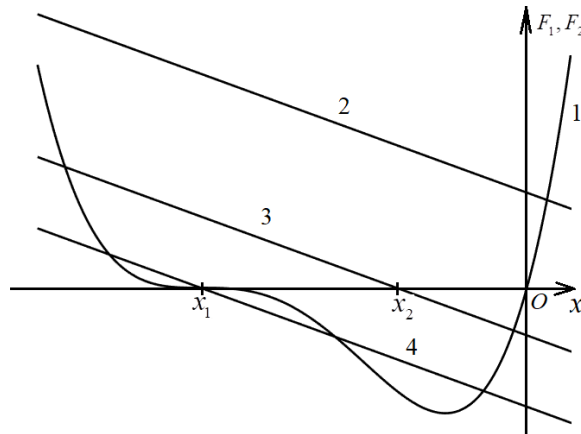


Рис. 1.8.

А. Пусть $a_j > 0$. На рис. 1.8 приведены графики $F_1(x)$ (кривая 1), $F_2(x)$ при $A_j > 0$ (кривая 2) и $F_2(x)$ при $A_j < 0$ (кривые 3 и 4). При $A_j > 0$ уравнение (1.32) имеет два корня разных знаков. Положительному корню соответствует $H_j > 0$, а отрицательному – отрицательное значение $H_j < 0$, которое не имеет физического смысла. Рассмотрим случай $A_j < 0$. Функция $F_1(x)$ обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=x_1 = -a_j / \alpha$, а $F_2(x)$ – в точке $x_2 = A_j / b$. Из (1.33) следует, что

$$\frac{A_j}{b} = -\frac{a_j}{\alpha} + \frac{C}{\alpha} + \frac{1 - \lambda \cos \psi}{\alpha}. \quad (1.34)$$

Так как $C \geq 0$ и, согласно (1.29), $1 - \lambda \cos \psi > 0$, то точка x_2 лежит правее точки x_1 (рис. 1.8). Из этого следует, что при $A_j < 0$ уравнение (1.32) может иметь либо два решения (кривая 3 на рис. 1.8), у которых одному соответствует $H_j > 0$, а другому $H_j < 0$, либо более двух решений, из которых двум или трем соответствует $H_j > 0$. Если (1.32) имеет более одного корня с $H_j > 0$, необходимо брать корень, наименьший по модулю, так как только он стремится к нулю при $\Delta \varphi \rightarrow 0$. Таким образом $q_j > q_{j-1}$ при $A_j > 0$ и $q_j < q_{j-1}$ при $A_j < 0$. Значения $A_j = 0$ соответствует $q_j = q_{j-1}$. Уравнение (1.32) эффективно решается итерациями метода Ньютона при $x_0 = 0$

$$x_{i+1} = \frac{A_j + 3\alpha x_i^2 (a_j^2 + \alpha x_i)^2}{b + (a_j^2 + \alpha x_i)^2 (a_j + 4\alpha x_i)}. \quad (1.35)$$

Б. Пусть $a_j < 0$. На рис. 1.9 приведены графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ при $a_j < 0$. Точка, в которой $F_2(x) = 0$, лежит правее корня уравнения $F_1(x) = 0$, равного $x_0 = -a_j / \alpha$.

На рис. 1.9 видно, что при значении $a_j < 0$ уравнение (1.32) имеет два корня, одному из которых соответствует $H_j > 0$, а другому - $H_j < 0$. При этом корень, которому соответствует $H_j > 0$, лежит правее точки x_0 . Уравнение (1.32) эффективно решается итерациями (1.35) при начальном приближении $x_0 > -a_j / \alpha$.

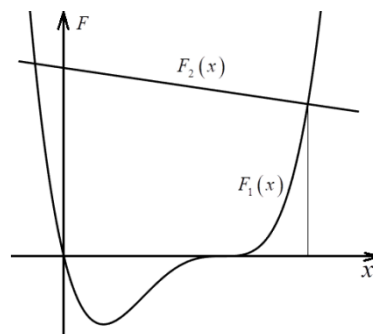


Рис. 1.9.

В. Пусть $a_j = 0$. Из (1.34) следует, что $A_j > 0$. Уравнение (1.32) принимает вид $\alpha x^4 + bx = A_j$, имеет два решения, одному из которых соответствует $H_j > 0$, а другому $H_j < 0$, и эффективно решается итерациями (1.35) при начальном приближении $x_0 = A_j / b$. Если $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2 - \psi < 2|\psi|$, то $A_2 > 0$ и $q_2 = q(\varphi_2) > 0$. Решая последовательно уравнения (1.32) при $j = 2, \dots, N$, получаем $\{q_j\}$ и $\{H_j\}$ ($j = 2, \dots, N$), $q_1 = q(\psi) = 0, q_2 > 0$. При этом $q_j > 0$ для всех j или при каком-то $N_1 \leq N$ давление q_{N_1} меньше нуля. Во втором случае существует такое $\vartheta < 2\pi + \psi$, что $p(\vartheta) = 0$, т.е. внутри (ψ, ϑ) , $\vartheta \leq 2\pi + \psi$ функция $q(\varphi)$ больше нуля, а в граничных точках она равна нулю. Определив ϑ и $q(\varphi)$ в выбранных узлах области, рассчитаем проекции на оси x и y результирующей сил со стороны смазочного слоя на вал:

$$B_x = -\int_{\psi}^{\vartheta} q(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad B_y = \int_{\psi}^{\vartheta} q(\varphi) \cos \varphi d\varphi$$

и угол между линией действия нагрузки и осью y

$$\operatorname{tg} \varphi_\delta = -B_x / B_y.$$

Расчет подшипника с частичным углом охвата заключается в нахождении таких значений ψ и Π , что $-\psi + \varphi_\delta \leq \theta_1$, $\Pi = 0$ при $\varphi_\delta - \psi < \theta_1$ или $\Pi \geq 0$ при

$$\varphi_\delta - \psi = \theta_1, \quad \vartheta - \varphi_\delta = \theta_2 \quad (1.36)$$

где $-\theta_1$ и θ_2 - угловые координаты выходной и входной кромок вкладыша.

Сначала задаем $\Pi = 0$ и ищем такое ψ , что либо $\varphi_\delta - \psi = \theta_1, \vartheta - \varphi_\delta \leq \theta_2$, либо $\vartheta - \varphi_\delta = \theta_2, \varphi_\delta - \psi < \theta_1$. Если $\lambda > 1$, то в соответствии с (1.29) $-\psi \geq \arccos(1/\lambda)$.

Если при значениях $\lambda > 1$ и $\psi = -\arccos(1/\lambda)$ либо $\varphi_\delta - \psi > \theta_1$, либо $\vartheta - \varphi_\delta > \theta_2$, то при заданных значениях λ, θ_1 и θ_2 задача не имеет решения.

Уменьшая ψ от нуля при $\lambda \leq 1$ и от $\psi = -\arccos(1/\lambda)$ при $\lambda > 1$, найдем такое ψ , что либо $\varphi_\delta - \psi = \theta_1, \vartheta - \varphi_\delta \leq \theta_2$, либо $\vartheta - \varphi_\delta = \theta_2, \varphi_\delta - \psi < \theta_1$. Если выполняется равенство $\vartheta - \varphi_\delta = \theta_2$, а $\varphi_\delta - \psi \leq \theta_1$, то получено решение задачи. Смазочный

слой начинается на входной кромке, а заканчивается на выходной кромке, если $\varphi_\delta - \psi = \theta_1$, не доходя до выходной кромки, если $\varphi_\delta - \psi < \theta_1$. Если же $\varphi_\delta - \psi = \theta_1$, а $\vartheta - \varphi_\delta < \theta_2$, то смазочный слой заканчивается на выходной кромке. Тогда увеличиваем Π и ищем такое ψ , что $\varphi_\delta - \psi = \theta_1$, $\vartheta - \varphi_\delta = \theta_2$.

Расчет подшипника с полным углом охвата и зазором, заполненным смазочным материалом, проводим в следующем порядке. Задаем $\Pi = 0$ и подбираем такое ψ , что $\vartheta = 2\pi + \psi$. Расчет подшипника скольжения с полным углом охвата при частичном заполнении зазора смазочным материалом состоит в подборе такого ψ при $\Pi = 0$, что коэффициент заполнения зазора равен заданной величине.

После расчетов по данной методике нагрузка на единицу длины вала W может быть найдена по формуле

$$W = R \int_{\psi}^{\vartheta} p(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_\delta) d\varphi = 6 \frac{\mu \omega R^3}{\Delta^2} B \quad (1.37)$$

где

$$B = \int_{\psi}^{\vartheta} q(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_\delta) d\varphi = B_y \cos \varphi_\delta - B_x \sin \varphi_\delta = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{W \Delta^2}{6 \mu \omega R^2}.$$

Анализ результатов расчета. Исследуем решение для подшипника с частичным углом охвата при $\theta_1 = \theta_2 \equiv \theta = \pi/3$. Рассмотрим, как влияют деформации вкладыша на распределение толщины смазочного слоя $H(\varphi)$.

Уровень деформаций характеризуется параметром $\alpha = (1 + \nu)(1 - 2\nu)\varepsilon p_* / [(1 - \nu)E\Delta]$, где $p_* = 6\mu\omega R^2 / \Delta^2$ - характерное гидродинамическое давление. Значение α равно радиальному упругому перемещению внутренней поверхности упругого слоя под действием давления p_* , деленному на радиальный зазор Δ . Значение $\alpha = 0$ соответствует абсолютно жесткому вкладышу ($E = \infty$) либо отсутствию вкладыша ($\varepsilon = 0$).

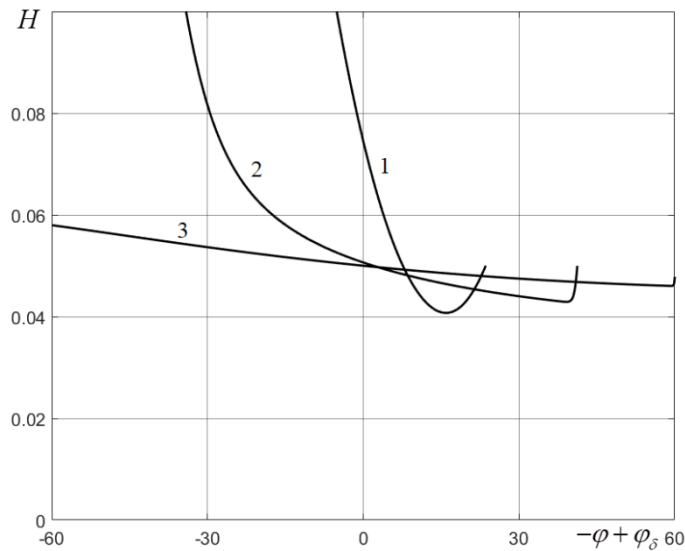


Рис. 1.10

На рис. 1.10 приведены зависимости H от φ при $H_0 = 0,05$ и при различных значениях α . Здесь H_0 – значение $H(\varphi)$ в месте, где $dp/d\varphi = 0$. По оси абсцисс отложена координата $-\varphi + \varphi_\delta$. Значению $\pi/3 = 60^\circ$ этой координаты соответствует начало рабочего зазора. Росту данной координаты соответствует движение от входа в рабочий зазор к выходу. Кривая 1 получена при $\alpha = 0.0001$, кривая 2 – при $\alpha = 0.008$, кривая 3 – при $\alpha = 0.04$.

Из приведенных результатов расчета следует, что с ростом α зазор выравнивается и его "клиновидность" уменьшается. Такое поведение $H(\varphi)$ с ростом α следует из выражения (1.27). Дифференцируя его по φ , получаем $dH/d\varphi = \lambda \sin \varphi + \alpha dq/d\varphi$. Во входной области $dH/d\varphi > 0$, $\sin \varphi > 0$ а $dq/d\varphi < 0$, поэтому деформации вкладыша уменьшают $dH/d\varphi$. В выходной области $dH/d\varphi < 0$, $\sin \varphi < 0$, а $dq/d\varphi > 0$, и деформации вкладыша выравнивают $H(\varphi)$ и в выходной области смазочного слоя.

На рис. 1.11 показана зависимость коэффициента $\gamma = (H_{\max} - H_{\min})/H_{\min}$, где $H_{\max} = \max_{\varphi \in (\psi, \vartheta)} H(\varphi)$, $H_{\min} = \min_{\varphi \in (\psi, \vartheta)} H(\varphi)$, от α при $H_0 = 0.05$. Видно, что с ростом α значение γ уменьшается. Результаты расчетов показывают, что значение $\gamma \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Это означает, что при заданном значении H_0 функция $H(\varphi)$

стремится к постоянному значению в области $\psi < \varphi < \vartheta$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Анализ расчетов показывает также, что при заданном значении H_0 значение $\psi \rightarrow -\theta$, а $\varphi_\delta \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

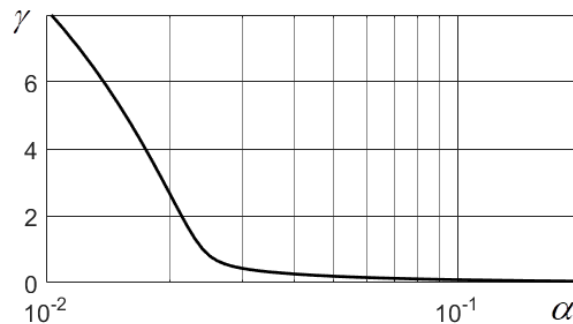


Рис. 1.11

Таким образом, при $\alpha \rightarrow \infty$ направление вектора смещения центра вала совпадает с направлением вектора нагрузки. При этом область, в которой генерируется смазочный слой, становится симметричной относительно как вектора смещения центра вала, так и относительно вектора нагрузки, а толщина слоя стремится в этой области к постоянному значению.

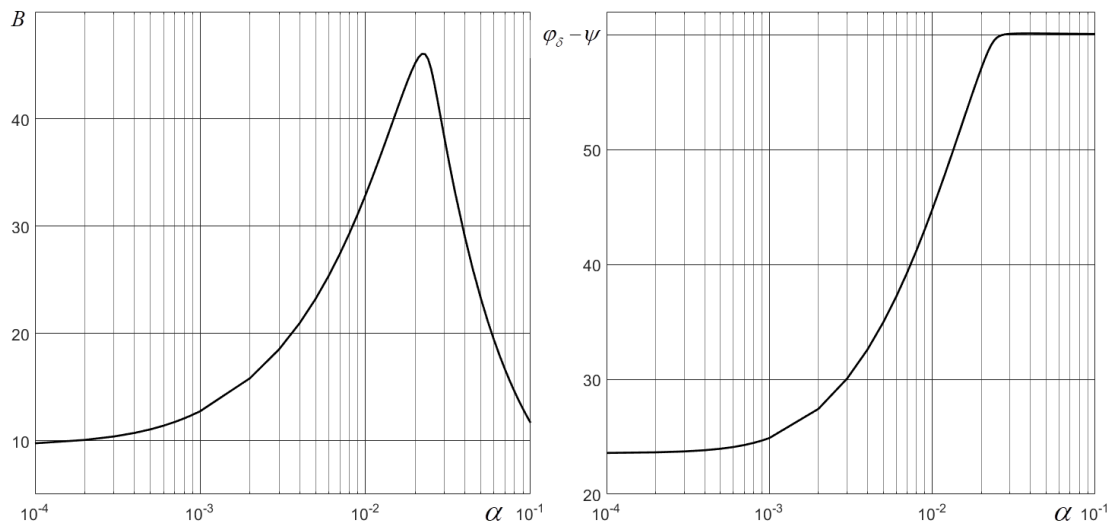


Рис. 1.12

На рис. 1.12 приведены зависимости $B(\alpha)$ и $(-\psi(\alpha) + \varphi_\delta(\alpha))$ при значении $H_0 = 0.05$. Величина $-\psi + \varphi_\delta$ равна углу между вектором нагрузки и радиусом – вектором, проходящим через выходную граничную точку области, занимаемой смазочным слоем. Другими словами, значение $(-\psi(\alpha) + \varphi_\delta(\alpha))$

равно угловой протяженности части смазочного слоя, расположенной левее линии действия нагрузки.

Из приведенных результатов следует, что при росте значения α результирующая сила B , действующая со стороны смазочного слоя на вал, растет, достигает максимума и далее падает. При этом выходная граница смазочного слоя приближается к границе выходного кармана, имеющей координату $\varphi = \varphi_\delta - \psi$. Имеется значение параметра $\alpha = \alpha^*$ такое, что при значениях $\alpha \geq \alpha^*$ смазочный слой обрывается на входной кромке выходного кармана. Отметим, что нагрузка B достигает максимума при значении $\alpha \approx \alpha^*$.

Таким образом, при фиксированном значении параметра H_0 и росте параметра α нагрузочная способность смазочного слоя растет вместе с ростом размера области, занимаемой смазочным слоем. При достижении выходной границы смазочного слоя входной границы выходного кармана дальнейшее расширение смазочного слоя невозможно и нагрузочная способность смазочного слоя начинает падать с ростом значения параметра α .

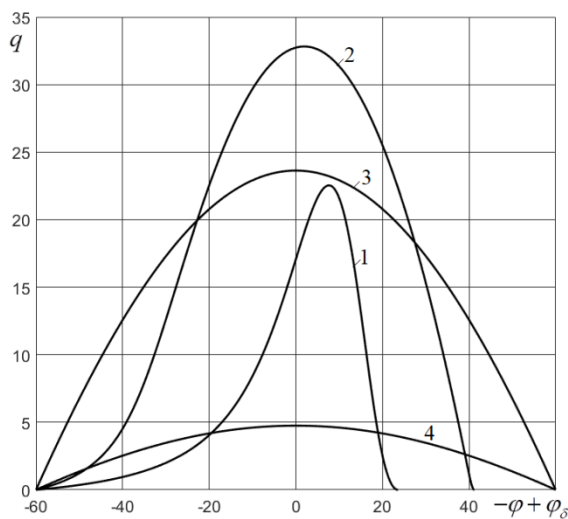


Рис. 1.13

Рассмотрим теперь, как влияют деформации вкладыша на распределение гидродинамического давления. На рис. 1.13 показано $q(\varphi)$ в смазочном слое

при $H_0 = 0,05$ и различных значениях α . Кривая 1 получена при $\alpha = 0.0001$, кривая 2 – при $\alpha = 0.008$, кривая 3 – при $\alpha = 0.04$ и кривая 4 – при $\alpha = 0.2$.

Из приведенных результатов расчета следует, что с ростом α давление в каждой точке сначала растет, а затем падает. Такое поведение $q(\varphi)$ с ростом α объясняется следующим образом. Отметим, что в соответствии с (1.26) $dq/d\varphi = (H - H_0)/H^3$. Функция $F(H) = (H - H_0)/H^3$ растет при уменьшении H , если $H > 3H_0/2$, и убывает, если $H < 3H_0/2$. С ростом α зазор в подшипнике выравнивается, а $H - H_0$ и H во входной области уменьшаются. Так как в отсутствие деформаций величина H во входной области велика, то при ее уменьшении, вызванном ростом α , функция $F(H)$, а, следовательно, и $|dq/d\varphi|$ во входной области растут, что приводит к росту $q(\varphi)$. Если зазор $H(\varphi)$ вследствие деформаций стал настолько мал, что во всей области $H < 3H_0/2$, то при дальнейшем росте α давление $q(\varphi)$ уменьшается вместе с уменьшением $F(H)$.

Как уже говорилось, при $\alpha \rightarrow \infty$ функция $H(\varphi) \rightarrow \text{const} = H_0$ при $\psi < \varphi < \vartheta$, а $\psi \rightarrow -\theta$.

Поэтому для больших α при расчете деформаций вкладыша можно систему "жесткий вал радиуса R_1 – смазочный слой" заменить на один жесткий вал радиуса $R_1 + h_0$.

При этом распределение гидродинамического давления должно незначительно отличаться от давления в сухом контакте жесткого вала радиуса $R_1 + h_0$ и тонкого упругого вкладыша, закрепленного в жестком корпусе, при угле контакта θ .

Чтобы найти это давление p , запишем условие контакта жесткого вала и тонкого вкладыша толщиной ε в виде

$$1 - \lambda \cos \varphi + \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \frac{\varepsilon}{(\Delta - h_0)E} p = 0, \quad -\theta \leq \varphi \leq \theta \quad (1.38)$$

где по-прежнему $\Delta = R_2 - R_1$. Принимая в (1.38) $\varphi = \theta$ и учитывая, что $p(\theta) = 0$, получаем соотношение $\lambda = 1/\cos \theta$, подставив которое в (1.38), найдем

$$p(\varphi) = \frac{(\Delta - h_0)E}{\varepsilon} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} - 1 \right), -\theta \leq \varphi \leq \theta. \quad (1.39)$$

Умножив (1.39) на $\cos \varphi$ и проинтегрировав от $-\theta$ до θ , получим

$$W_* = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} W = \frac{(\Delta - h_0)ER}{\varepsilon} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta}, \quad (1.40)$$

где W - нагрузка, сжимающая тела, отнесенная к единице длины вала. В безразмерных переменных выражения (1.39) и (1.40) запишутся так;

$$q = \frac{1-H_0}{\alpha} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} - 1 \right) \quad (1.41)$$

$$B = \frac{(1-H_0)}{\alpha} \frac{(\theta - \sin \theta \cos \theta)}{\cos \theta}. \quad (1.42)$$

Таким образом, при больших значениях α имеем $q \sim \alpha^{-1}$ и $B \sim \alpha^{-1}$.

Рассмотрим теперь, как ведут себя $H(\varphi)$ и $q(\varphi)$ при $H_{\min} \rightarrow 0$.

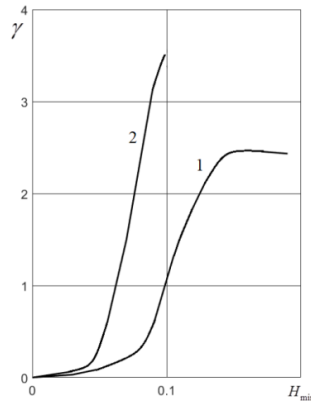


Рис. 1.14

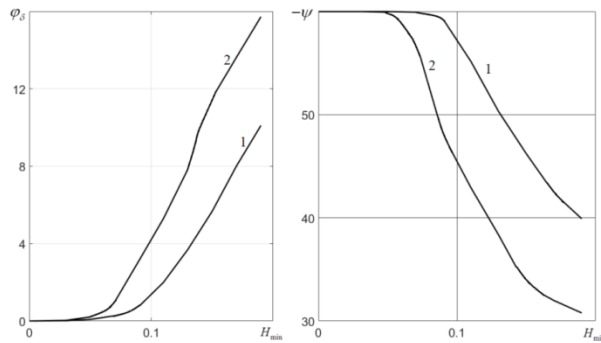


Рис. 1.15

На рис. 1.14 приведена зависимость коэффициента $\gamma = (H_{\max} - H_{\min}) / H_{\min}$ от $H_{\min}$ при различных значениях α . Кривая 1 получена при $\alpha = 0.1$, кривая 2 – при $\alpha = 0.05$. Видно, что $\gamma \rightarrow 0$ при $H_{\min} \rightarrow 0$ и любом значении α .

На рис. 1.15 приведены зависимости углов ψ и φ_δ от $H_{\min}$ при тех же значениях α . Видно, что при любом α есть такое значение $H_{\min} = H^*(\alpha)$, что при $0 < H_{\min} < H^*$ значение $\psi = -\theta$. Кроме того, $\varphi_\delta \rightarrow 0$ при $H_{\min} \rightarrow 0$ и при любом значении α .

Таким образом, при $H_{\min} \rightarrow 0$ и при любом значении α имеем $\varphi_\delta \rightarrow 0, \psi \rightarrow -\theta, \gamma \rightarrow 0$, т.е. поверхности вала и вкладыша контактируют в области $-\theta \leq \varphi \leq \theta$. В таком случае распределение гидродинамического давления при любом $\alpha > 0$ и $H_{\min} \rightarrow 0$ должно стремиться к распределению давления в сухом контакте вала и вкладыша. Из этого следует, что соотношения (1.39)-(1.42) справедливы при любом значении α , если $H_0 \rightarrow 0$.

Приведенные результаты важны при изучении перехода от гидродинамического трения к граничному трению.

Итак, при любом $\alpha > 0$ верны равенства

$$\lim_{h_{\min} \rightarrow 0} p(\varphi) = \frac{\Delta E}{\varepsilon} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} - 1 \right), -\theta \leq \varphi \quad (1.43)$$

$$W^* = \lim_{h_{\min} \rightarrow 0} W = \frac{\Delta E R}{\varepsilon} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta} \quad (1.44)$$

которые получаются из (1.39) и (1.40) при $h_0 \rightarrow 0$. Аналогично из (1.41) и (1.42) получаем

$$\lim_{H_{\min} \rightarrow 0} q(\varphi) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} - 1 \right), \quad \lim_{H_{\min} \rightarrow 0} B = \frac{1}{\alpha} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta} \quad (1.45)$$

Из (1.43) следует, что максимальное давление, развиваемое в смазочном слое подшипника скольжения с тонким вкладышем, удовлетворяет условию

$$p_{\max} < \frac{\Delta E}{\varepsilon} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}.$$

Равенство (1.44) означает, что при конечной (хотя бы и очень малой) упругой податливости вкладыша несущая способность смазочного слоя оказывается конечной даже при $h_{\min} \rightarrow 0$. Отметим, что если не учитывать деформацию вкладыша, то, как это следует из п. 1.1, максимальное давление в смазочном слое и его несущая способность стремятся к бесконечности при $h_{\min} \rightarrow 0$.

При нагрузке W^* , определяемой равенством (1.44), смазочный слой исчезает и осуществляется непосредственный контакт вала и вкладыша в области $-\theta \leq \varphi \leq \theta$.

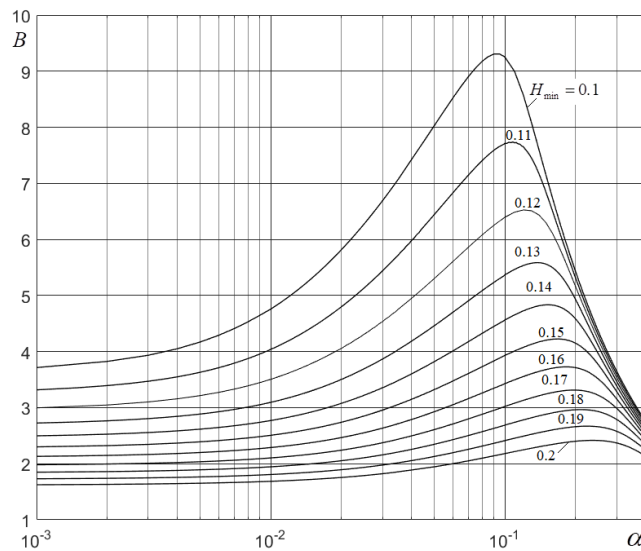


Рис. 1.16

На рис. 1.16 и рис. 1.17 приведены зависимости параметра B от α при различных значениях $H_{\min}$. Видно, что B как функция α имеет максимум.

Так как $\alpha \sim \varepsilon/E$, а $W \sim B$, то несущая способность смазочного слоя как функция модуля упругости материала вкладыша E или как функция толщины вкладыша ε при заданном значении минимальной толщины смазочного слоя имеет максимум. Таким образом, при заданном сорте масла и заданном режиме работы подшипника (скорости) имеется оптимальная толщина вкладыша, при которой несущая способность смазочного слоя максимальна. Зависимости, приведенные на рис. 1.16 и 1.17, могут быть использованы для определения оптимальной толщины вкладыша для подшипников с углом охвата 120° .

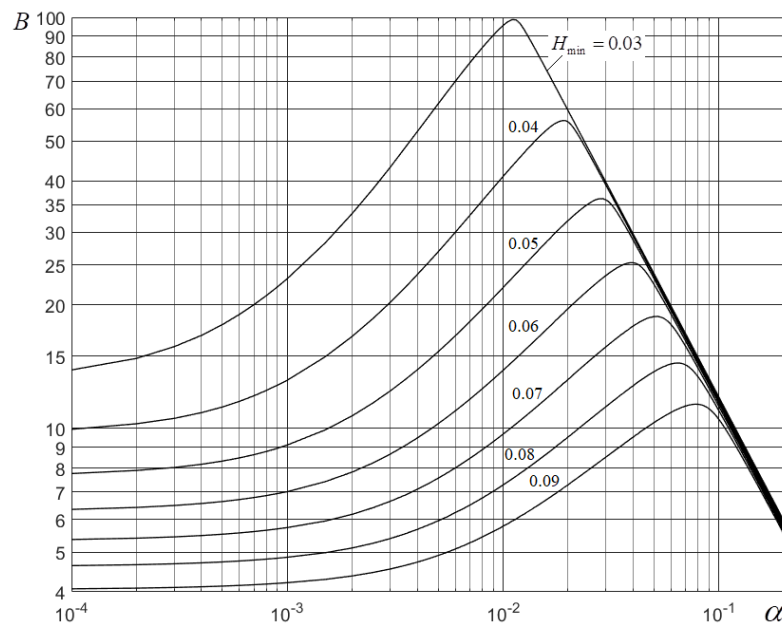


Рис. 1.17

Коэффициент трения определяется по формуле

$$f_t = \frac{\mu u R_1}{W} \int_{\psi}^{\vartheta} \frac{d\varphi}{h(\varphi)} = \frac{\mu u R_1}{W \Delta} \bar{f}_t, \quad \bar{f}_t = \int_{\psi}^{\vartheta} \frac{d\varphi}{H(\varphi)}$$

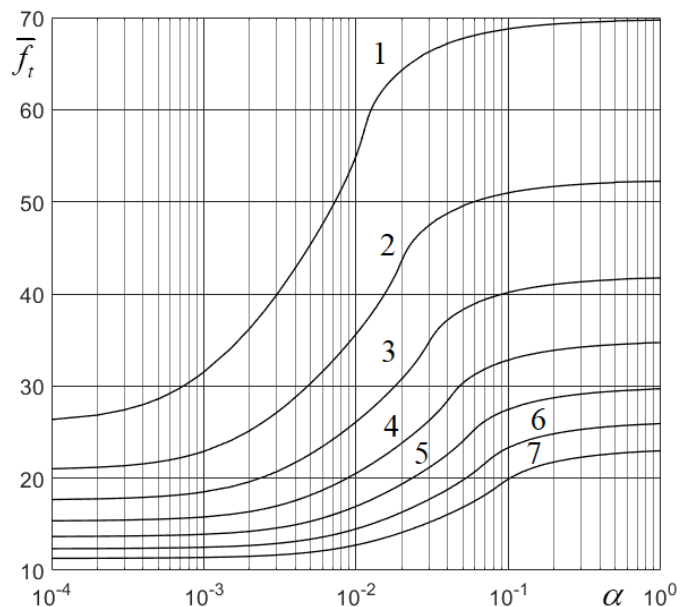


Рис. 1.18. Зависимости $\bar{f}_t$ от α при различных значениях $H_{\min}$. Кривая 1 - $H_{\min} = 0.03$, 2 - $H_{\min} = 0.04$, 3 - $H_{\min} = 0.05$, 4 - $H_{\min} = 0.06$, 5 - $H_{\min} = 0.07$, 6 - $H_{\min} = 0.08$, 7 - $H_{\min} = 0.09$

На рис. 1.18 приведены зависимости $\bar{f}_t$ от α при различных значениях $H_{\min}$. Из приведенных результатов расчетов следует, что с ростом влияния деформаций коэффициент трения растет. Это связано с тем, что с ростом податливости поверхности упругого слоя зазор выравнивается. На входе в зазор он уменьшается и в пределе зазор в рабочей области стремится к постоянной величине, равной $H_{\min}$. В результате при высоких значениях α значение параметра $\bar{f}_t$ близко к значению $2\pi/H_{\min}$.

На рис. 1.19 приведены зависимости эксцентриситета λ от параметра α при различных значениях $H_{\min}$. При малых значениях α значение $\lambda \approx 1 - H_{\min}$, что справедливо при отсутствии деформаций вкладыша. При росте α вследствие деформаций вкладыша эксцентриситет растет. Быстрый рост эксцентриситета происходит в относительно небольшом интервале изменения параметра α . Далее эксцентриситет меняется слабо и стремится к предельному значению, равному $(1 - H_0)/\cos\theta$ (ниже приведен вывод предельного значения эксцентриситета).

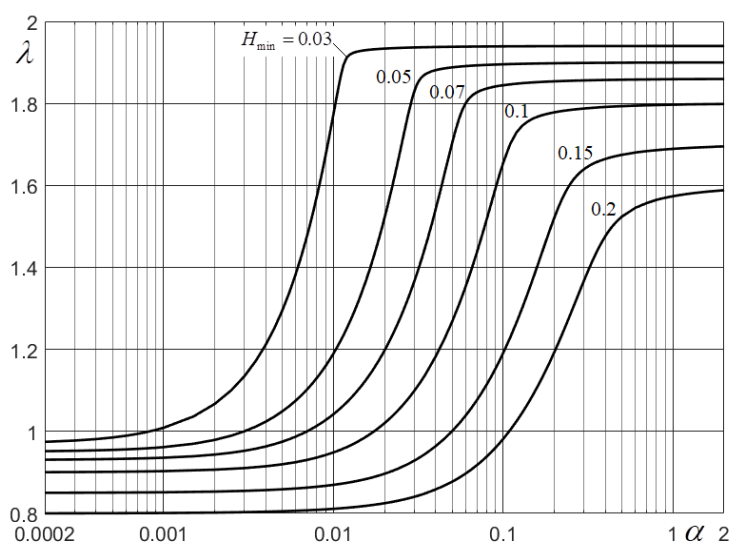


Рис. 1.19

Из приведенных результатов следует, что при каждом значении $H_{\min}$ существует значение параметра $\alpha = \alpha_*$, при котором коэффициент нагруженности B , как функция параметра α , принимает максимальное значение. Обозначим это значение $B_{\max}$. Отношение $B_{\max}/B_{gd}$, где B_{gd} – коэффициент нагруженности при отсутствии деформаций вкладыша, показывает, во сколько раз деформации вкладыша могут повысить нагрузочную способность. На рис. 1.20 приведена зависимость отношения $B_{\max}/B_{gd}$ от безразмерной минимальной толщины смазочного слоя $H_{\min}$. Точные значения равны: $B_{\max}/B_{gd} = 7.447$ при $H_{\min} = 0.03$, $B_{\max}/B_{gd} = 2.576$ при $H_{\min} = 0.1$ и $B_{\max}/B_{gd} = 1.493$ при $H_{\min} = 0.2$.

Приведенные результаты показывают, что деформации могут существенно повысить нагрузку на подшипник при заданной минимальной толщине смазочного слоя.

Обозначим λ_* значение λ при значении $\alpha = \alpha_*$. На рис. 1.21 приведена зависимость $\lambda_*(H_{\min})$, а на рис. 1.22 – зависимость $\alpha_*(H_{\min})$. Приведенные зависимости определяют значения α и λ , при которых отношение $B_{\max}/B_{gd}$ максимально при заданном значении $H_{\min}$. Они могут быть использованы при оптимизации параметров неметаллических подшипников скольжения жидкостного трения.

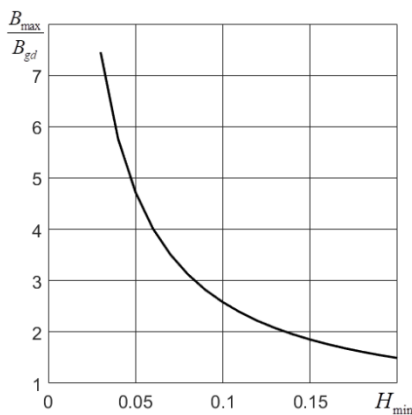


Рис. 1.20

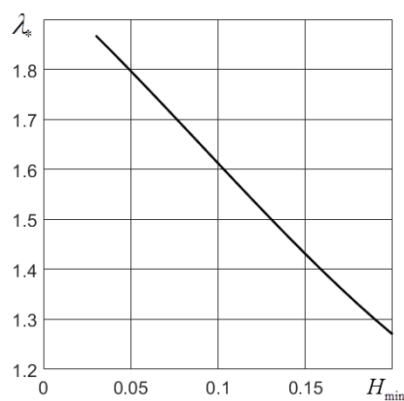


Рис. 1.21

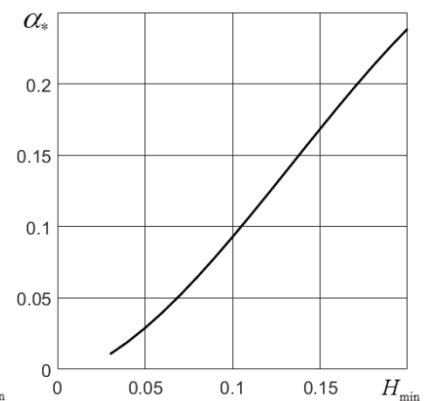


Рис. 1.22

Анализ результатов расчетов показал, что при малых значениях параметра α решение данной задачи незначительно отличается от аналитического решением, приведенного выше. Например, при $\lambda = 0.97$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi/3$ решение системы уравнений (1.15), (1.16) и уравнения $\chi_1 = -\chi_0$ имеет вид: $\chi_0 = 0.8948$, $\chi_1 = -0.8948$, $\chi_2 = 2.8164$. По формулам (1.3), (1.10), (1.12) и (1.13) находим: $\varphi_\delta = 0.2426$, $\vartheta = 1.2898$, $\psi = -0.11829$, $B_x = 3.1285$, $B_y = 12.6409$, $B = 13.0223$. Условие $\psi_\delta - \psi < \theta_1$ принимает вид: $0.2426 + 0.11829 < \pi/3$, т. е. выполняется. Это означает, что смазочный слой обрывается, не доходя до входной кромки выходного кармана и что решение найдено.

При $H_{\min} = 0.03$ и $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}$ численное решение дает: $\varphi_\delta = 0.239$, $B = 13.22$, $\lambda = 0.9705$. Сопоставление результатов показывает, что численное решение незначительно отличается от аналитического решения. При этом с учетом деформаций относительный эксцентриситет и коэффициент нагруженности немного выше, чем при не учете деформаций.

Аналитическое решение задачи при больших деформациях вкладыша.

Рассмотрим случай больших значений α , когда $H = H_0 + v(\varphi)$, где H_0 – значение H в месте, где $dq/d\varphi = 0$, и $|v(\varphi)|/H_0 < 1$. Угол φ будем отсчитывать от линии действия нагрузки. Тогда (1.27) принимает вид

$$H = 1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta) + \alpha q, \quad (1.46)$$

где φ_δ – угол между линией действия нагрузки и линией, соединяющей центры окружностей (рис. 1.1). Интегрируя (1.26), получаем

$$H^3 \frac{dq}{d\varphi} = -v(\varphi), \quad v(\varphi) = H(\varphi) - H_0.$$

Пренебрегая членами порядка $|v|/H_0$ по сравнению с единицей, получаем

$$\frac{dq}{d\varphi} = -\frac{v}{H_0^3}.$$

Подставляя в правую часть $v = H - H_0$ и (1.46), приходим к уравнению

$$\frac{dq}{d\varphi} + \frac{\alpha}{H_0^3} q = -\frac{1}{H_0^3} [1 - H_0 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta)] \quad (1.47)$$

Интегрируя (1.47), получаем

$$\begin{aligned}
 q(\varphi) &= -\frac{1}{H_0^3} \exp(-\alpha^* \varphi) \int_{\psi}^{\varphi} \exp(\alpha^* t) [1 - H_0 - \lambda \cos(t - \varphi_{\delta})] dt = \\
 &= -\frac{1 - H_0}{\alpha} \left[1 - \exp(-\alpha^* (\varphi - \psi)) \right] + \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + H_0^6}} \left[\cos(\varphi - \varphi_{\delta} - \varphi_{\alpha}) - \right. \\
 &\quad \left. - \exp(-\alpha^* (\varphi - \psi)) \cos(\psi - \varphi_{\delta} - \varphi_{\alpha}) \right], \tag{1.48}
 \end{aligned}$$

где $\alpha^* = \frac{\alpha}{H_0^3}$, $\sin \varphi_{\delta} = \frac{H_0^3}{\sqrt{\alpha^2 + H_0^6}}$. Условия равновесия вала запишутся в виде

$$\int_{\psi}^{\theta} q(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \int_{\psi}^{\theta} q(\varphi) \cos \varphi d\varphi = B, \tag{1.49}$$

где коэффициент нагруженности B связан с нагрузкой, действующей на единицу длины вала, соотношением (1.37). Умножая (1.47) поочередно на $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ и интегрируя от ψ до θ , находим с учетом (1.49)

$$\begin{aligned}
 B &= -(1 - H_0)(\cos \theta - \cos \psi) + \frac{\lambda}{4} \left[\cos(2\theta - \varphi_{\delta}) - \cos(2\psi + \varphi_{\delta}) - 2(\theta - \psi) \sin \varphi_{\delta} \right] \\
 B &= -\frac{1 - H_0}{\alpha} (\sin \theta - \sin \psi) + \frac{\lambda}{4\alpha} \left[2(\theta - \psi) \cos \varphi_{\delta} + \sin(2\theta - \varphi_{\delta}) - \sin(2\psi - \varphi_{\delta}) \right]
 \end{aligned}$$

Приравнявая правые части этих уравнений, получаем

$$\begin{aligned}
 2(\theta - \psi) \sin(\varphi_{\alpha} + \varphi_{\delta}) - \cos(2\theta + \varphi_{\alpha} - \varphi_{\delta}) + \cos(2\psi - \varphi_{\delta} + \varphi_{\alpha}) &= \\
 = 4 \frac{1 - H_0}{\lambda} \left[\cos(\psi + \varphi_{\alpha}) - \cos(\theta + \varphi_{\alpha}) \right] \tag{1.50}
 \end{aligned}$$

Принимая в (1.48) $\varphi = \theta$ и учитывая, что $q(\theta) = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha^*}{\sqrt{1 + \alpha^{*2}}} \left[\cos(\theta - \varphi_{\delta} - \varphi_{\alpha}) - \exp(-\alpha^* (\theta - \psi)) \cos(\psi - \varphi_{\delta} - \varphi_{\alpha}) \right] &= \\
 = \frac{1 - H_0}{\lambda} \left[1 - \exp(-\alpha^* (\theta - \psi)) \right]. \tag{1.51}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\psi = -\theta$. Исключив из (1.50) и (1.51) λ , получим уравнение

$$\begin{aligned}
 \sin 2\theta \sin(\varphi_{\alpha} - \varphi_{\delta}) + 2\theta \sin(\varphi_{\alpha} + \varphi_{\delta}) &= \\
 = 2 \sin \theta \sin 2\varphi_{\alpha} \left[\cos \theta \cos(\varphi_{\alpha} + \varphi_{\delta}) + \sin \theta \sin(\varphi_{\alpha} + \varphi_{\delta}) \operatorname{cth}(\alpha^* \theta) \right],
 \end{aligned}$$

которое имеет решение

$$\varphi_{\delta} = -\varphi_{\alpha}, \text{ или } \varphi_{\delta} = -\arcsin \frac{H_0^3}{\sqrt{\alpha^2 + H_0^6}} \tag{1.52}$$

Подставляя (1.52) в (1.51), находим

$$\lambda = \frac{1-H_0}{\cos \theta} \frac{\sqrt{1+\alpha^{*2}}}{\alpha^*}. \quad (1.53)$$

Подставляя (1.52) и (1.53) в (1.48), получаем выражение

$$q(\varphi) = \frac{1-H_0}{\alpha} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} - 1 \right),$$

которое совпадает с (1.41). Из (1.41) находим $dq(-\theta)/d\varphi = (1-H_0) \operatorname{tg} \theta / \alpha > 0$.

Подставляя (1.41) в (1.49), получаем

$$B = \frac{1-H_0}{\alpha} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta},$$

что совпадает с (1.42). Подставив (1.41) и (1.53) в (1.46), найдем

$$H = H_0 + \frac{1-H_0}{\cos \theta} \operatorname{tg} \varphi_\alpha \sin \varphi = H_0 + \frac{1-H_0}{\alpha^* \cos \theta} \sin \varphi.$$

Отсюда следует, что для $|H-H_0|/H_0 \ll 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha^* > \frac{1-H_0}{H_0} \operatorname{tg} \theta, \text{ или } \frac{\alpha}{H_0^2} \gg (1-H_0) \operatorname{tg} \theta \quad (1.54)$$

При выполнении этого условия $h_0 \approx h_{\min}$, поэтому (1.54) и (1.40) можно представить в виде

$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{\mu \omega \varepsilon R^2}{E} \gg \frac{1}{6} h_{\min}^2 (\Delta - h_{\min}) \operatorname{tg} \theta, \quad (1.55)$$

$$W_* = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{(\Delta - h_{\min}) ER}{\varepsilon}. \quad (1.56)$$

Нагрузка W_* , определяемая этой формулой, представляет собой максимальную несущую способность, которую может обеспечить смазочный слой с заданной минимальной толщиной $h_{\min}$ в гидродинамическом подшипнике скольжения с тонким вкладышем. Эта несущая способность обеспечивается при выполнении условия (1.55), в противном случае она будет меньше (1.56), имея максимум как функция ε .

Влияние изменения вязкости и плотности смазочного материала с изменением давления. Зависимость плотности смазки от давления наиболее часто в теории смазки принимают в виде [12]

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\tilde{C}_1 p}{1 + \tilde{C}_2 p} \right), \quad (1.57)$$

ρ_0 - плотность смазочного материала при атмосферном давлении, C_1, C_2 - константы. Типичные значения констант:

$$\tilde{C}_1 = 0.6 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}, \quad \tilde{C}_2 = 1.7 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1} \quad (1.58)$$

Вязкость смазочного материала, входящая в уравнение Рейнольдса, зависит как от давления, так и от температуры. Для учета зависимости вязкости от давления наиболее часто используются две модели. Наиболее простой является модель Баруса [77], в соответствии с которой вязкость экспоненциально растет с ростом давления, то есть

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha p), \quad (1.59)$$

где μ_0 - вязкость смазочного материала при атмосферном давлении, α - пьезокоэффициент вязкости. Более точной является модель Роланда

$$\mu = \mu_0 \exp \left\{ \frac{\alpha p_0}{Z} \left[-1 + \left(1 + \frac{p}{p_0} \right)^Z \right] \right\}, \quad Z = \frac{\alpha p_0}{9.67 + \ln \mu_0}, \quad (1.60)$$

где p_0 - константа (обычно $1/p_0 = 5.1 \cdot 10^{-9}$).

Модель Роланда используют в не конформном (внешнем) контакте, когда давления принимают высокое значение (более 1 ГПа) и модель Баруса дает завышенные значения. В опорах скольжения давление в смазочном слое не достигает таких высоких значений и можно ограничиться моделью Баруса.

Максимальное давление в опорах скольжения может достигать нескольких десятков Мпа, но всегда ниже 100 Мпа. Из (1.57) и (1.58) следует, что изменение плотности смазочного материала вследствие изменения давления в опорах скольжения не превышает 3 процентов, поэтому влиянием изменения плотности смазочного материала на решение УГД задачи можно пренебречь.

Вязкость смазочного материала в тяжело нагруженных опорах скольжения жидкостного трения может возрасти вследствие повышения давления в 2 и более раз, поэтому учитывать изменение вязкости желательно.

При учете влияния давления на вязкость смазочного материала уравнение Рейнольдса в безразмерных переменных запишем в виде

$$\frac{d}{d\varphi} \left(H^3 \exp(-Gq) \frac{dq}{d\varphi} \right) = -\frac{dH}{d\varphi}, \quad (1.61)$$

где $G = \alpha_p p_0$, $p_0 = 6\mu\omega R_1^2 \Delta^{-2}$.

При численном решении задачи вместо уравнения (1.61) используем уравнение

$$(1 - \lambda \cos \varphi_j + \alpha q_j)^3 \frac{\exp(-G\alpha q_{j-1}) - \exp(-G\alpha q_j)}{\alpha G} + \alpha q_j \Delta \varphi = C \Delta \varphi + \lambda \Delta \varphi (\cos \varphi_j - \cos \psi)$$

Вместо (1.32) используем уравнение

$$(a_j + \alpha x)^3 F(x) = A_j - bx \quad (1.62)$$

где $F(x) = \frac{\exp(-\alpha G q_{j-1})}{\alpha G} [1 - \exp(-\alpha G x)]$

Уравнение (1.62) решается тем же методом, что и уравнение (1.32). В остальном отличий в решении задачи при учете изменения вязкости смазочного материала от решения задачи при не учете изменения вязкости нет.

Для смазочных материалов, используемых в опорах скольжения, $\alpha_p \leq 2 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$. Максимальное давление в тяжело нагруженных опорах скольжения не превосходит 50 Мпа . Таким образом, в тяжело нагруженных опорах скольжения обычно выполняется соотношение $Gq_{\max} < 1$. Здесь $q_{\max}$ - максимальное безразмерное контактное давление.

Максимальное давление в смазочном слое, как было показано выше, существенно изменяется с изменением параметра α . Поэтому исследовать влияние роста вязкости смазочного материала с ростом давления на решение задачи будем проводить путем исследования влияния изменения параметра G на решение задачи при фиксированных значениях параметра α .

На рис. 1.23 приведены зависимости $H(\varphi)$ и $q(\varphi)$ при значении $\alpha = 0.003$, безразмерной минимальной толщине смазочного слоя $H_{\min} = 0.05$ и при

различных значениях параметра G . При фиксированной минимальной толщине смазочного слоя и росте параметра G безразмерное давление растет. Поведение функции $H(\varphi)$ с ростом параметра G является сложным. Она уменьшается с ростом параметра G при значениях φ , при которых $H(\varphi) > H_0$ и возрастает при значениях φ , при которых $H(\varphi) < H_0$.

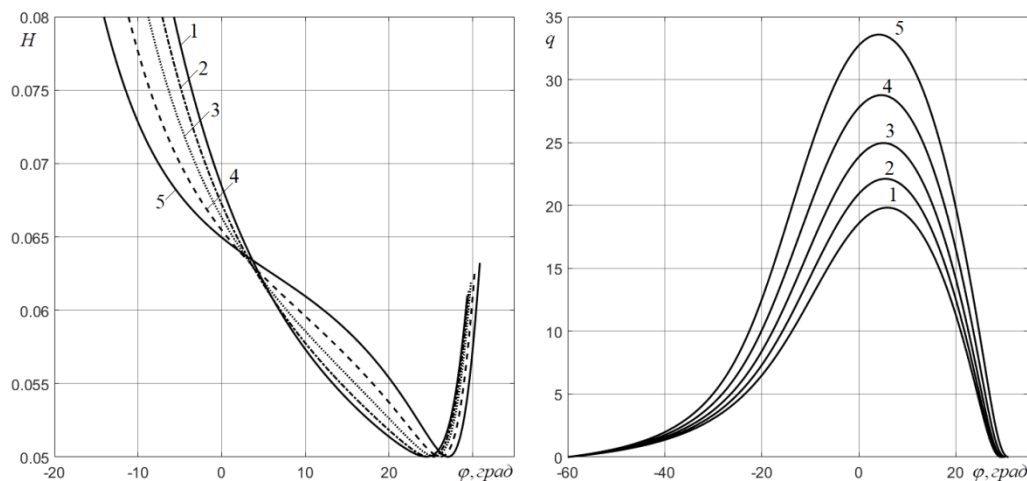


Рис. 1.23. зависимости $H(\varphi)$ и $q(\varphi)$ при значении $\alpha = 0.003$, безразмерной минимальной толщине смазочного слоя $H_{\min} = 0.05$ и при различных значениях параметра G . 1 - $G = 0$; 2 - $G = 0.1$; 3 - $G = 0.2$; 4 - $G = 0.3$; 5 - $G = 0.4$

Отметим, что приведенный на рис. 1.23 интервал изменения параметра G существенно превышает практические значения. На практике максимальное значение параметра G , как правило, ограничено условием $Gq_{\max} < 0.5$. То есть реально влияние давления на вязкость смазочного материала может привести к тому, что вместо кривых 3 на рис. 1.23 реализуются кривые 1.

1.4. Деформации кругового кольца.

Если размеры области контакта тел соизмеримы с радиусом кривизны соприкасающихся поверхностей, что, например, имеет место в подшипниках

скольжения, то расчёт контактных деформаций заключается в решении соответствующей задачи теории упругости для кругового кольца. Приведем решение данной задачи относительно перемещений поверхностей при произвольных распределениях напряжений на поверхностях [14]. Полученное решение будет использовано при постановке математической модели радиального подшипника скольжения.

Рассмотрим кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями L_1 и L_0 радиусов R_1 и R_0 ($R_1 < R_0$) соответственно (рис. 1.24).

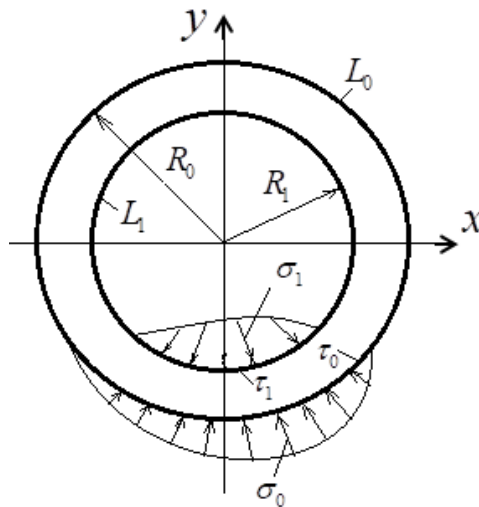


Рис. 1.24

Пусть на внутреннем контуре кольца действуют нормальные σ_1 и касательные τ_1 напряжения, а на внешнем – напряжения σ_0 и τ_0 . Полагаем, что кольцо находится в состоянии статического равновесия. Определим радиальные $v_{r,1}$ и $v_{r,0}$ упругие перемещения точек, лежащих на окружностях L_1 и L_0 . Введём в рассмотрение плоскость комплексной переменной $z = x + iy$, точка $0 + i0$ которой расположена в центре окружностей L_0 и L_1 , а направление оси y совпадает с направлением главного вектора усилий, действующих на контур L_0 . Обозначим $r \geq 0$ и φ полярные координаты в плоскости O_{xy} , так что $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Разложим функции $\sigma_1 - i\tau_1$ и $\sigma_0 - i\tau_0$ в комплексные ряды Фурье:

$$\sigma_1 - i\tau_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\varphi}, \quad \sigma_0 - i\tau_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\varphi}, \quad (1.63)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_1(\varphi) - i\tau_1(\varphi)] e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad (1.64)$$

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_0(\varphi) - i\tau_0(\varphi)] e^{-ik\varphi} d\varphi \quad (1.65)$$

Предположим, что $\sigma_1(\varphi)$, $\tau_1(\varphi)$ и $\sigma_0(\varphi)$ и $\tau_0(\varphi)$ - непрерывные 2π -периодические функции с кусочно-непрерывной производной. Тогда (1.64) и (1.65) сходятся абсолютно и равномерно по $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Из плоской теории упругости [42] известно, что напряжённое состояние в кольцевой области полностью определяется двумя аналитическими функциями комплексной переменной z : $\varphi(z), \psi(z)$ и их производными $\varphi'(z) = \Phi(z)$ и $\psi'(z) = \Psi(z)$. Компоненты v_r и u_φ вектора перемещений в точке $z = x + iy$ и компоненты σ_r и $\tau_{r\varphi}$ тензора напряжений связаны с комплексными потенциалами $\varphi(z), \psi(z)$ формулами

$$2\mu(v_r - iu_\varphi) = e^{i\varphi} [k\bar{\varphi}(z) - z\Phi(z) - \psi(z)] \quad (1.66)$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\varphi} = \Phi(z) + \bar{\Phi}(z) - z\Phi'(z) - e^{2i\varphi}\Psi(z) \quad (1.67)$$

где μ - модуль сдвига материала кольца

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = 3 - 4\nu$$

E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Черта означает комплексное сопряжение.

Комплексные потенциалы определяются из соотношений (1.66), (1.67) с помощью граничных условий, заданных на контурах L_1 и L_0 . Если W - нагрузка, действующая на единицу ширины кольца, то комплексные потенциалы имеют вид [42]

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= -\alpha_0 \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad \alpha_0 = \frac{W}{2\pi(1+\chi)}, \\ \Phi(z) &= -\frac{\alpha_0}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \alpha_k z^{k-1}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\psi(z) = \chi\alpha_0 \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad \Psi(z) = \frac{\chi a_0}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k b_k z^{k-1},$$

где $a_k, b_k (k=0, \pm 1, \dots)$ - комплексные коэффициенты, определяемые из граничных соотношений. Дифференцируя обе части уравнения (1.66) два раза по φ , получаем после несложных преобразований с учётом (1.66) и (1.67)

$$2\mu \left(v_r + \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} \right) = r \left\{ -\sigma_r + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + (\chi+1) \operatorname{Re} [\Phi(z) - z\Phi'(z)] \right\}, \quad (1.69)$$

где Re означает действительную часть комплексного числа. Подставив (1.68) в (1.67) и воспользовавшись граничными значениями (1.63) для σ_r и $\tau_{r\varphi}$, получим уравнения относительно a_k и b_k , решив которые найдём

$$\Phi(z) = -\frac{\alpha_0}{z} + l_0^* + \frac{l_1^* z}{R_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[l_k^* \left(\frac{z}{R_1} \right)^k + (\bar{c}_k + v_k) \left(\frac{R_1}{z} \right)^k \right],$$

$$\operatorname{Re} l_0^* = (g_0 - \lambda^2 c_0) / [2(1 - \lambda^2)], \quad \lambda = R_1 / R_0, \quad (1.70)$$

$$l_k^* = (\lambda^2 / \Delta_k) \left[(1+k)(1-\lambda^2)(g_k \lambda^{k-2} - c_k) - \bar{c}_{-k}(\lambda^2 - \lambda^{2k}) + \bar{g}_{-k}(\lambda^{-k} - \lambda^{k-2}) \right], \quad k=2, 3, \dots,$$

$$\Delta_k = \lambda^2 \left[(\lambda^k - \lambda^{-k})^2 - k^2(\lambda - \lambda^{-1})^2 \right], \quad (1.71)$$

$$v_k = (\lambda^2 / \Delta_k) \left[(1-k)(1-\lambda^2)(g_{-k} \lambda^{-k-2} - c_{-k}) + \bar{g}_k(\lambda^k - \lambda^{-k-2}) + \bar{c}_k(2 + k^2(\lambda - \lambda^{-1})^2 - \lambda^2 - \lambda^{2k}) \right],$$

$$a_2 = \frac{l_1^*}{2R_1} = \frac{\lambda^4}{2(\lambda^4 - 1)R_1} \bar{c}_{-1} - \frac{\lambda}{2(\lambda^4 - 1)R_1} \bar{g}_{-1} + \frac{\alpha_0 \lambda}{R_1^2(1 + \lambda^2)},$$

$$b_{-2} = -\frac{R_1^3 \lambda}{2(1 - \lambda^4)} g_{-1} + \frac{R_1^3}{2(1 - \lambda^4)} c_{-1} + \frac{\alpha_0 R_1^2}{1 + \lambda^2};$$

Подставляя выражения (1.64) и (1.65) для коэффициентов c_k и g_k в (1.71), полученное выражение в (1.69), суммируя ряды и устремляя r к R_0 и R_1 , получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{R_1} \left(v_{r,1} + \frac{d^2 v_{r,1}}{d\varphi^2} \right) &= \frac{\chi-1}{2} \left(\sigma - \frac{d\tau_1}{d\varphi} \right) + \frac{\chi+1}{4\pi(1-\lambda^2)} \left[\int_0^{2\pi} \sigma_0(t) dt - \int_0^{2\pi} \sigma_1(t) dt \right] + \\ &+ \frac{\chi+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \tau_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-t}{2} dt + \frac{\chi+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sigma'_1(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-t}{2} dt + \frac{\chi}{\pi R_1} W \cos \varphi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\chi+1) \int_0^{2\pi} \sigma_1(t) K_{\sigma_1}^+(\varphi-t) dt + (\chi+1) \int_0^{2\pi} \tau_1(t) K_{\tau_1}^+(\varphi-t) dt + \\
& +(\chi+1) \int_0^{2\pi} \sigma_0(t) K_{\sigma_0}^+(\varphi-t) dt + (\chi+1) \int_0^{2\pi} \tau_0(t) K_{\tau_0}^+(\varphi-t) dt
\end{aligned} \tag{1.72}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\mu}{R_0} \left(v_{r,0} + \frac{d^2 v_{r,0}}{d\varphi^2} \right) = \frac{\chi-1}{2} \left(\sigma_0 - \frac{d\tau_0}{d\varphi} \right) + \frac{\lambda^2(\chi+1)}{4\pi(1-\lambda^2)} \left[\int_0^{2\pi} \sigma_0(t) dt - \int_0^{2\pi} \sigma_1(t) dt \right] - \\
& - \frac{\chi+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \tau_0(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-t}{2} dt - \frac{\chi+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sigma'_0(t) \operatorname{ctg} \frac{\varphi-t}{2} dt - \frac{W}{\pi R_0} \cos \varphi + \\
& + (\chi+1) \int_0^{2\pi} K_{\sigma_1}^-(\varphi-t) \sigma_1(t) dt + (\chi+1) \int_0^{2\pi} K_{\tau_1}^-(\varphi-t) \tau_1(t) dt + (\chi+1) \int_0^{2\pi} K_{\sigma_0}^-(\varphi-t) \sigma_0(t) dt + \\
& + (\chi+1) \int_0^{2\pi} K_{\tau_0}^-(\varphi-t) \tau_0(t) dt,
\end{aligned} \tag{1.73}$$

$$K_{\sigma_i}^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=2}^{\infty} e_{\sigma_i m}^{\pm}, \cos mx, \quad i=0,1, \quad K_{\tau_i}^{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=2}^{\infty} e_{\tau_i m}^{\pm}, \sin mx, \quad i=0,1,$$

$$-e_{\sigma_1,k}^+ = \left\{ 2k\lambda^2(\lambda^{2k}-1) - k^2(\lambda^2-1) \left[k+1+\lambda^2(1-k) \right] \right\} / \Delta_k,$$

$$e_{\tau_1,k}^+ = \left\{ (k+1) \left[2\lambda^2 + k^2(\lambda^2-1)^2 \right] - 2\lambda^2(k\lambda^2 + \lambda^{2k}) \right\} / \Delta_k,$$

$$e_{\sigma_0,k}^+ = \left[k^2(\lambda^2-1)(\lambda^k + \lambda^{-k}) + k(1+\lambda^2)(\lambda^k + \lambda^{-k}) \right] / \Delta_k$$

$$e_{\tau_0,k}^+ = \left\{ \left[2 + k^2(\lambda^2-1) \right] (\lambda^k - \lambda^{-k}) - k(1-\lambda^2)(\lambda^k + \lambda^{-k}) \right\} / \Delta_k$$

$$e_{\sigma_1,k}^- = \left[k^2\lambda^2(\lambda^2-1)(\lambda^k + \lambda^{-k}) + k\lambda^2(\lambda^2+1)(\lambda^k - \lambda^{-k}) \right] / \Delta_k$$

$$e_{\tau_1,k}^- = \left\{ \lambda^2 \left[2\lambda^2 + k^2(1-\lambda^2) \right] (\lambda^2 - \lambda^{-k}) + k\lambda^2(1+\lambda^2)(\lambda^k + \lambda^{-k}) \right\} / \Delta_k$$

$$e_{\sigma_0,k}^- = \left[(1-k^2)(1-\lambda^2)(\lambda^{2k}+1) + 2\lambda^2 k(\lambda^{2k}-1) + 2(\lambda^2-1) + k^2(1-k)(\lambda^2-1)^2 \right] / \Delta_k,$$

$$e_{\tau_0,k}^- = \left\{ 2\lambda^2(k-1+\lambda^{2k}) + (1-k^2)(1-\lambda^2)(1-\lambda^{2k}) - k \left[2 + k(1-k)(\lambda^2-1)^2 \right] \right\} / \Delta_k$$

Функции $K_{\sigma_1}^-(\varphi), K_{\sigma_0}^-(\varphi), K_{\tau_1}^-(\varphi), K_{\tau_0}^-(\varphi), K_{\sigma_1}^+(\varphi), K_{\sigma_0}^+(\varphi), K_{\tau_1}^+(\varphi)$ и $K_{\tau_0}^+(\varphi)$ являются

непрерывными 2π -периодическими и имеют непрерывные 2π -периодические производные любого порядка. Считая правые части уравнений (1.69) и (1.72) известными и интегрируя эти уравнения относительно $v_{r,1}$ и $v_{r,0}$, находим

$$\begin{aligned}
\frac{2\mu}{(\chi+1)R_1} v_{r,i} = & \frac{(-1)^{i+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_i(t) \cos(\varphi-t) + \tau_i(t) \sin(\varphi-t)] \ln \left\{ 2 \sin \left| \frac{\varphi-t}{2} \right| \right\} dt + \\
& + \frac{\chi-1}{4\pi(\chi+1)} \int_0^{2\pi} \sigma_i(t) \sin(\varphi-t) (\pi - |\varphi-t|) \text{sign}(\varphi-t) dt + \\
& + \frac{\chi-1}{4\pi(\chi+1)} \int_0^{2\pi} [\tau_i(t)(\varphi-t) \cos(\varphi-t) - \pi t'_i(t) \sin|\varphi-t|] dt - \\
& - \frac{\lambda^2}{4\pi(1-\lambda^2)} \int_0^{2\pi} \sigma_1(t) dt + \frac{A_i}{4\pi(1-\lambda^2)} \int_0^{2\pi} \sigma_0(t) dt + \\
& + \int_0^{2\pi} [\sigma_1(t) L_{\sigma_1}^{\pm}(\varphi, t) + \tau_1(t) L_{\tau_1}^{\pm}(\varphi, t) + \sigma_0(t) L_{\sigma_0}^{\pm}(\varphi, t) + \tau_0(t) L_{\tau_0}^{\pm}(\varphi, t)] dt + \\
& + C_1^{\pm} \cos \varphi + C_2^{\pm} \sin \varphi, \quad i = 0, 1
\end{aligned} \tag{1.74}$$

где $A_1=1, A_0=2\lambda^2-1$; верхний индекс плюс берётся при $i=1$, а минус при $i=0$

$C_1^{\pm}, C_2^{\pm}$ - постоянные интегрирования;

$$L_{\sigma_i}^{\pm}(\varphi, s) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=2}^{\infty} e_{\sigma_i, k}^{\pm} \delta_k(\varphi, s), \quad i = 0, 1$$

$$L_{\tau_i}^{\pm}(\varphi, s) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=2}^{\infty} e_{\tau_i, k}^{\pm} \delta_k^*(\varphi, s), \quad i = 0, 1$$

$$\delta_k(\varphi, s) = \frac{\cos(\varphi - ks)}{2(k-1)} - \frac{\cos(\varphi + ks)}{2(k+1)} - \frac{\cos k(\varphi - s)}{k^2 - 1},$$

$$\delta_k^*(\varphi, s) = \frac{\sin(\varphi - ks)}{2(k-1)} - \frac{\sin(\varphi + ks)}{2(k+1)} - \frac{\sin k(\varphi - s)}{k^2 - 1},$$

Выражения $C_1^{\pm} \cos \varphi + C_2^{\pm} \sin \varphi$ определяют жёсткие перемещения контура L_1 (индекс плюс над C_1 и C_2) и контура L_0 (индекс минус). Жёсткое перемещение одного из этих контуров можно задать произвольным, при этом положении другого контура должно определяться однозначно. Это означает, что из постоянных $C_1^{\pm}$ и $C_2^{\pm}$ только две могут быть выбраны произвольным образом: одна из C_1^+ , C_1^- и одна из C_2^+ , C_2^- . Умножая обе части уравнений последовательно на $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и интегрируя от 0 до 2π , получаем выражения для проекций жёсткого перемещения i -го контура ($i = 0, 1$) на оси x и y соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{(\chi+1)R_i} \int_0^{2\pi} v_{r,i}(\varphi) \cos \varphi d\varphi - \pi C_1^\pm = \frac{(-1)^{i+1} B_i}{4(\chi+1)} (\sigma_{i,1}^{(c)} + \tau_{i,1}^{(c)}) + \\ + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} \left[e_{\sigma_1,k}^\pm \sigma_{1,k}^{(c)} - e_{\tau_1,k}^\pm \tau_{1,k}^{(s)} + e_{\sigma_0,k}^\pm \sigma_{0,k}^{(c)} - e_{\tau_0,k}^\pm \tau_{0,k}^{(s)} \right], \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{(\chi+1)R_i} \int_0^{2\pi} v_{r,i}(\varphi) \sin \varphi d\varphi - \pi C_2^\pm = \frac{(-1)^{i+1} B_i}{4(\chi+1)} \sigma_{i,1}^{(s)} - \frac{C_1}{8(\chi+1)} \tau_{1,1}^c + \\ + \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1} \left[e_{\sigma_1,k}^\pm \sigma_{1,k}^{(s)} + e_{\tau_1,k}^\pm \tau_{1,k}^{(c)} + e_{\sigma_0,k}^\pm \sigma_{0,k}^{(s)} + e_{\tau_0,k}^\pm \tau_{0,k}^{(c)} \right], \end{aligned}$$

$$i = 0, 1,$$

$$\text{где } B_1 = 1, B_0 = \chi, C_1 = \chi - 3, C_0 = 3\chi - 1,$$

$$\sigma_{i,k}^{(c)} = \int_0^{2\pi} \sigma_i(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad \sigma_{i,k}^{(s)} = \int_0^{2\pi} \sigma_i(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi.$$

Находим выражения для проекций жёсткого смещения контура L_0 относительно контура L_1 :

$$\begin{aligned} 2\mu \int_0^{2\pi} [v_{r,1}(\varphi) - v_{r,0}(\varphi)] \cos \varphi d\varphi = -2\pi\chi\alpha_0 \ln \lambda - \\ - \pi(2-\chi)(R_1^2 - R_0^2) \operatorname{Re} \alpha_2 - \pi \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \operatorname{Re} b_{-2}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$2\mu \int_0^{2\pi} [v_{r,1}(\varphi) - v_{r,0}(\varphi)] \sin \varphi d\varphi = \pi(2-\chi)(R_1^2 - R_0^2) \operatorname{Im} \alpha_2 - \pi \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_0^2} \right) \operatorname{Im} b_{-2}. \quad (1.77)$$

Подставляя в (1.76), (1.77) выражения для a_2 и b_{-2} , получаем

$$\begin{aligned} 2\mu \int_0^{2\pi} [v_{r,1}(\varphi) - v_{r,0}(\varphi)] \cos \varphi d\varphi = -2\alpha_0 \pi \chi \ln \lambda + \frac{\chi-1}{2(\chi+1)} \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} W - \\ - \frac{1+\lambda^2(2-\chi)}{4(1+\lambda^2)} R_1 \int_0^{2\pi} (\sigma_1 \cos \varphi + \tau_1 \sin \varphi) d\varphi + \frac{2-\chi+\lambda^2}{4(\lambda^2+1)} R_0 \int_0^{2\pi} (\sigma_0 \cos \varphi + \tau_0 \sin \varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} 2\mu \int_0^{2\pi} [v_{r,1}(\varphi) - v_{r,0}(\varphi)] \sin \varphi d\varphi = - \frac{1+\lambda^2(2-\chi)}{4(1+\lambda^2)} R_1 \int_0^{2\pi} (\sigma_1 \sin \varphi - \tau_1 \cos \varphi) d\varphi + \\ + \frac{2-\chi+\lambda^2}{4(1+\lambda^2)} R_0 \int_0^{2\pi} (\sigma_0 \sin \varphi - \tau_0 \cos \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (1.79)$$

При решении конкретных задач одна пара констант (одна из C_1^+ , C_1^- и одна из C_2^+ , C_2^-) определяется заданием системы координат, а другая из соотношений (1.76), (1.77), (1.78).

Устремляя λ к нулю при значении $R_0 = const$, получаем выражение для упругих перемещений поверхности цилиндра при сосредоточенной силе в его центре в виде

$$w_0(\varphi) = \frac{2(1-\nu_0^2)R_0}{\pi E_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi) \left[\frac{1}{2} + \cos(\varphi - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| \right] d\xi +$$

$$+ \frac{(1-2\nu_0)(1+\nu_0)R_0}{2\pi E_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi) [(\varphi - \xi) - 2\pi\theta(\varphi - \xi)] d\xi + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi \quad (1.80)$$

$$\theta(\varphi - \xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi_1 \leq \xi \leq \varphi \\ 0, & \text{если } \varphi < \xi \leq \varphi_2 \end{cases}$$

Устремляя λ нулю при значении $R_1 = const$, получаем выражение для упругих перемещений внутренней поверхности подшипника, моделируемого пространством с цилиндрическим вырезом, в виде

$$w_1 = -\frac{2(1-\nu_1^2)R_0}{\pi E_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi) \cos(\varphi - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| d\xi +$$

$$+ \frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)R_1}{2\pi E_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi) [(\varphi - \xi) - 2\pi\theta(\varphi - \xi)] d\xi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi \quad (1.81)$$

Для случая, когда значение $0 < \lambda < 1$, а на поверхности L_0 напряжения равны $\sigma_0 - i\tau_0 \equiv g(\varphi) = A(1 + \exp(iN\varphi))$, $(\varphi \in [\pi - \beta_N, \pi + \beta_N] \equiv I_N)$, $g(\varphi) = 0 (\varphi \notin I_N)$, где $N \geq 2$ - заданное натуральное число, выражение для упругих перемещений внутренней поверхности подшипника, моделируемого круговым кольцом, получаем в виде

$$w_1 = -\frac{2(1-\nu_1^2)R_0}{\pi E_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi) \cos(\varphi - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| d\xi +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)R_1}{2\pi E_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi) [(\varphi-\xi) - 2\pi\theta(\varphi-\xi)] d\xi + \frac{2(1-\nu_1^2)R_0}{\pi E_1} F(\varphi) + \\
& + \frac{2(1-\nu_1^2)R_0}{\pi E_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi) K(\varphi-\xi) d\xi + C_3 \cos \varphi + C_4 \sin \varphi
\end{aligned} \tag{1.82}$$

Постоянная A определяется из условия равновесия кольца, т. е.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\lambda W(N-1)}{2R_0 \sin \beta_N [N-1-(-1)^N]} \\
2\pi K(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k^2-1)}{\Delta_k} \left[(1-\lambda^2)^2 - 2 \frac{\lambda^{2k+2}}{k^2-1} - \frac{\lambda^4}{k+1} + \frac{1}{k-1} \right] \frac{\cos kx}{k^2-1} \\
F(x) &= \frac{\lambda(N-1)}{2[N-1+(-1)^N] \sin \beta_N} \left\{ \frac{\beta_N}{2(1-\lambda^2)} + \right. \\
&+ \sum_{k=2; k \neq N}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin k\beta_N \cos kx}{\Delta_k (k^2-1)} \lambda^{-k} \left\{ (k+1) \left[k(1-\lambda^2) \lambda^{2k} + \right. \right. \\
&+ 1 - \lambda^{2k} \left. \right] \left[\frac{1}{k} + \frac{(-1)^N}{N-k} \right] + (k-1) \left[k(1-\lambda^2) + 1 - \lambda^{2k} \right] \left[\frac{1}{k} + \frac{(-1)^{N+1}}{N+k} \right] \left. \right\} + \\
&+ \beta_N \frac{\cos Nx}{\Delta_N (N^2-1)} (N+1) \left[N(1-\lambda^2) \lambda^N + \lambda^{-N} - \lambda^N \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

1.5. Плоская изотермическая УГД задача смазки радиального подшипника скольжения.

При отсутствии неметаллического вкладыша изменения в толщину смазочного слоя вносят деформации вала и корпуса. Рассмотрим модель подшипника, состоящую из упругого вала и упругого пространства с цилиндрическим вырезом при наличии тонкого слоя вязкой жидкости. Учет влияния давления на вязкость смазочного материала.

Упругое перемещение w_0 поверхности цилиндра L_0 , по которой распределено давление $p(\varphi)$, может быть определено по формуле (1.80), а упруго перемещение поверхности выреза – по формуле (1.81). Рассмотрим случай, когда вал и подшипник имеют одинаковые модули упругости и коэффициенты Пуассона. Угловую координату будем отсчитывать от линии действия нагрузки. В качестве положительного направления угловой координаты выбираем направление вращения вала. Рассмотрим случай когда $-\theta_1 = \theta_2 = \theta$. В этом случае выражение для толщины смазочного слоя может быть представлено в виде

$$h(\varphi) = \Delta - \delta \cos(\varphi - \varphi_\delta) - \frac{4R(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-\theta}^{\varphi_c} p(\xi) \left[\cos(\varphi - \xi) \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right] d\xi \quad (1.83)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$H = \frac{h}{\Delta}, \quad q = \frac{p}{p_0}, \quad p_0 = \frac{1}{8} \frac{\Delta}{R} \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \lambda = \frac{\delta}{\Delta} \quad (1.84)$$

В безразмерных переменных уравнение (1.83) и уравнение Рейнольдса принимают вид

$$H(\varphi) = 1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\varphi_c} q(\xi) \left[\cos(\varphi - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right] d\xi \quad (1.85)$$

$$\bar{\rho} H^3 \exp(-Gq) \frac{dq}{d\varphi} = \alpha (\bar{\rho} H - H_0) \quad (1.86)$$

если смазочный слой обрывается, не доходя до входной кромки выходного кармана, и

$$\bar{\rho} H^3 \exp(-Gq) \frac{dq}{d\varphi} = \alpha (\bar{\rho} H - H_0) + H_0^3 \frac{dq}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\theta}$$

в противоположном случае. Здесь

$$H_0 = H(\varphi_c) = 1 - \lambda \cos(\varphi_c - \theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\varphi_c} q(\xi) \left[\cos(\varphi_c - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi_c - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right] d\xi$$

$$\alpha = \frac{6\mu_0 u R}{\Delta^2 p_0} = \frac{48\mu_0 u R^2}{\Delta^3 E'} = \frac{48\mu_0 u}{RE'} \frac{1}{\psi^3} = \frac{p_*}{p_0}, \quad p_* = \frac{6uR\mu_0}{\Delta^2}, \quad \psi = \frac{\Delta}{R}, \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (1.87)$$

Остальные уравнения и условия задачи в безразмерных переменных принимают вид

$$\bar{\rho} = 1 + \frac{C_1 q}{1 + C_2 q}, \quad \bar{\mu} = \exp(Gq), \quad \int_{-\theta}^{\varphi_c} q \cos \varphi d\varphi = P, \quad \int_{-\theta}^{\varphi_c} q \sin \varphi d\varphi = 0$$

$$q(-\theta) = q(\varphi_c) = 0, \quad 0 < \varphi_c \leq \theta,$$

где

$$P = \frac{W}{Rp_0} = \frac{8(1-\nu^2)W}{\Delta E} \quad (1.88)$$

В систему уравнений входят шесть независимых безразмерных входных параметров: $\theta, \alpha, C_1, C_2, P$ и G . Если не учитывать касательные напряжения в уравнении равновесия вала, а также влияние давления на вязкость и плотность смазочного материала, то число входных безразмерных параметров становится равным трем. Это θ, α и P . Параметр G учитывает влияние давления на вязкость смазочного материала, а параметры C_1 и C_2 - влияние давления на плотность смазочного материала.

Задавая значения входных параметров, задача состоит в нахождении относительного эксцентриситета λ , координаты выходной границы смазочного слоя φ_c , угла между вектором нагрузки и линией центров φ_δ , значения H_0 и функций $H(\varphi)$ и $q(\varphi)$.

Метод численного решения задачи. Рассмотрим сначала случай, когда смазочный слой обрывается, не доходя до входной кромки выходного кармана.

1. Задаем начальные приближения для переменных $\varphi_\delta, \varphi_c, \lambda$ и H_0 . Обозначим их $\varphi_\delta^0, \varphi_c^0, \lambda^0$ и H_0^0 .

2. На отрезке $[-\theta, \varphi_c^0]$ вводим неравномерную сетку $\{\varphi_k\}$, $k=1, 2, \dots, N$, $\varphi_1 = -\theta$, $\varphi_N = \varphi_c^0$

3. Задаем начальные приближения для функции $q(\varphi)$ в узлах φ_k , $k=2,3,\dots,N-1$, т. е. задаем начальные значения $q_k^0 = q(\varphi_k)$, $k=2,3,\dots,N-1$. Из граничных условий следует, что $q_1 = q_N = 0$.

4. При вычислении значения H в узле $\varphi = \varphi_i$ по формуле (1.93) функцию $q(\varphi)$ заменяем кусочно-линейной функцией

$$q(\varphi) = \sum_{k=2}^{N-1} q_k S_k(\varphi), \quad (1.89)$$

$$\text{где } S_k(\varphi) = \begin{cases} \frac{\varphi - \varphi_{k-1}}{\varphi_k - \varphi_{k-1}}, & \varphi_{k-1} \leq \varphi \leq \varphi_k \\ \frac{\varphi_{k+1} - \varphi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k}, & \varphi_k \leq \varphi \leq \varphi_{k+1} \\ 0, & \varphi \notin [\varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}] \end{cases}$$

Подставляя (1.89) в (1.85) и используя интегралы

$$\int \cos t \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = I_1(t) + c, \quad I_1(t) = \sin t \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| - \frac{1}{2}(t + \sin t)$$

$$\int t \cos t \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = I_2(t) + c_1, \quad I_2(t) = (t \sin t + \cos t - 1) \ln \left| \sin \frac{t}{2} \right| - \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} + t \sin t + 2 \cos t \right)$$

получаем

$$H_i = 1 - \lambda \cos(\varphi_i - \varphi_\delta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{N-1} q_k [I_{1,k}(\varphi_i) + I_{2,k}(\varphi_i)] \quad (1.90)$$

$$I_{1,k}(\varphi_i) = \frac{\varphi_i - \varphi_{k-1}}{\varphi_k - \varphi_{k-1}} \left[I_1(\varphi_k - \varphi_i) - I_1(\varphi_{k-1} - \varphi_i) - \frac{1}{4}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\varphi_k - \varphi_{k-1}} \left[I_2(\varphi_k - \varphi_i) - I_2(\varphi_{k-1} - \varphi_i) - \frac{1}{8}(\varphi_k - \varphi_i)^2 + \frac{1}{8}(\varphi_{k-1} - \varphi_i)^2 \right]$$

$$I_{2,k}(\varphi_i) = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_i}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \left[I_1(\varphi_{k+1} - \varphi_i) - I_1(\varphi_k - \varphi_i) - \frac{1}{4}(\varphi_{k+1} - \varphi_k) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \left[I_2(\varphi_{k+1} - \varphi_i) - I_2(\varphi_k - \varphi_i) - \frac{1}{8}(\varphi_{k+1} - \varphi_i)^2 + \frac{1}{8}(\varphi_k - \varphi_i)^2 \right]$$

5. Уравнение (1.86) в узле φ_i заменим конечно-разностным уравнением в виде

$$\bar{\rho}_{i+1} \left(\frac{H_i + H_{i+1}}{2} \right)^3 \frac{\exp(-Gq_{i+1}) - \exp(-Gq_i)}{G(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} = -\alpha(\bar{\rho}_{i+1}H_i - H_0), \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (1.91)$$

6. В узле $\varphi = \varphi_N$ известны значения функций $H(\varphi)$ и $q(\varphi)$. А именно: $H(\varphi_N) = H_0$, $q(\varphi_N) = 0$. Выражения (1.90) и (1.91) при заданных значениях q_k^0 , $k=1,2,\dots,N$ позволяют вычислять новые значения q_k^1 последовательно в узлах $N-1, N-2, \dots, 1$.

Для примера рассмотрим процесс определения q_{N-1}^1 . Выражение (1.90) для переменной H_{N-1} представим в виде

$$H_{N-1} = a_{N-1} + b_{N-1}x \quad (1.92)$$

$$\text{Где } a_{N-1} = 1 - \lambda^0 \cos(\varphi_{N-1} - \varphi_\delta^0) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{N-2} q_k^0 [I_{1,k}(\varphi_{N-1}) + I_{2,k}(\varphi_{N-1})],$$

$$b_{N-1} = -\frac{1}{2\pi} (I_{1,N-1}(\varphi_{N-1}) + I_{2,N-1}(\varphi_{N-1})), \quad x = q_{N-1}^1 - q_N.$$

Выражение (1.91) в узле φ_{N-1} с учетом (1.92) и $\bar{\rho}_N = 1$ представим в виде

$$(\tilde{a}_{N-1} + \tilde{b}_{N-1}x)^3 F(x) = A_{N-1} - c_{N-1}x \quad (1.93)$$

$$\text{где } \tilde{a}_{N-1} = 0.5(a_{N-1} + H_0), \quad \tilde{b}_{N-1} = 0.5b_{N-1}, \quad F(x) = \frac{1}{G(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} [1 - \exp(-Gx)],$$

$$A_{N-1} = -V\tilde{a}_{N-1} + VH_0, \quad c_{N-1} = Va_{N-1}.$$

Решая уравнение (1.93), получаем значение x и значение $q_{N-1}^1 = q_N + x = x$.

После выполнения указанной процедуры в узлах $N-2, \dots, 1$, получаем новые значения функции $q(\varphi)$ во всех узлах сетки, т. е. значения q_k^1 , $k=1,2,\dots,N$.

Таким образом, задавая значения $H_0^0, \lambda^0, \varphi_c^0, \varphi_\delta^0$ и значения q_k^0 , $k=2,3,\dots,N-1$ в результате полученных вычислений получаем значения q_k^1 , $k=1,2,\dots,N-1$.

Данные зависимости можно представить в виде $q_i^1 = f_i(H_0^0, \lambda, \varphi_c^0, \varphi_\delta^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_{N-1}^0)$, $i=1,2,\dots,N-1$, где f_i - функции, определение которых состоит в выполнении указанных выше вычислений.

Заменяя в уравнениях равновесия вала интегралы конечными суммами, получаем соотношения

$$\begin{aligned}
f_N(H_0^0, \varphi_c^0, \lambda^0, \varphi_\delta^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_{N-1}^0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (q_i^1 + q_{i+1}^1) (\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-2} (f_i + f_{i+1}) (\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i) + \frac{1}{2} f_{N-1} (\sin \varphi_N - \sin \varphi_{N-1}) = P \\
f_{N+1}(H_0^0, \lambda^0, \varphi_c^0, \varphi_\delta^0, q_2^0, q_3^0, \dots, q_{N-1}^0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-2} (f_i + f_{i+1}) (\cos \varphi_{i+1} - \cos \varphi_i) + \frac{1}{2} f_{N-1} (\cos \varphi_N - \cos \varphi_{N-1}) = 0
\end{aligned}$$

Переменные $H_0, \lambda, \varphi_c, \varphi_\delta, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}$ будут являться решением задачи, если будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned}
f_1(H_0, \lambda, \varphi_c, \varphi_\delta, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}) &= 0 \\
q_i &= f_i(H_0, \lambda, \varphi_c, \varphi_\delta, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}), i = 2, 3, \dots, N-1 \\
f_N(H_0, \lambda, \varphi_c, \varphi_\delta, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}) &= P \\
f_{N+1}(H_0, \lambda, \varphi_c, \varphi_\delta, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}) &= 0 \\
H_0 - 1 + \lambda \cos(\varphi_c - \varphi_\delta) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{N-1} q_k [I_{1,k}(\varphi_N) + I_{2,k}(\varphi_N)] &= 0
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Уравнения (1.94) представляют собой систему $N + 2$ уравнений относительно $N + 2$ неизвестных: $H_0, \lambda, \varphi_c, \varphi_\delta, q_2, q_3, \dots, q_{N-1}$. Данная система уравнений эффективно решается методом Ньютона-Рафсона.

Если смазочный слой обрывается на входной кромке выходного кармана, то переменная φ_c не подлежит определению. Она равна углу θ . При этом

появляется новая переменная $-\left. \frac{dq}{d\varphi} \right|_{\varphi=\theta}$. Метод решения задачи в этом случае

принципиально не отличается от изложенного решения. Вместо переменной

φ_c в уравнения (1.94) подставляется переменная $\left. \frac{dq}{d\varphi} \right|_{\varphi=\theta}$. В уравнении (1.93)

при этом выражение A_{N-1} принимает вид $A_{N-1} = -Va_{N-1} + \alpha H_0 - H_0^3 \left. \frac{dq}{d\varphi} \right|_{\varphi=\theta}$.

Анализ результатов расчетов. Отношение

$$\frac{P}{\alpha} = \frac{W\Delta^2}{6\mu_0 u R^2}$$

не зависит от упругих свойств вала и подшипника, а параметр α обратно пропорционален модулю упругости вкладыша, поэтому зависимость

параметра $B \equiv \frac{P}{\alpha}$ от параметра V характеризует влияние упругости вкладыша на нагрузку, которую уравнивает давление, развиваемое в смазочном слое. При высоких значениях модуля упругости E , что соответствует жесткому вкладышу, значение параметра V мало. При малых значениях модуля упругости E , что соответствует высоким деформациям вкладыша, значение параметра α велико. Таким образом, характер изменения отношения B при росте параметра α дает представление о том, как влияет рост деформаций вкладыша на несущую способность смазочного слоя.

На рис. 1.25 и рис. 1.26 приведены зависимости параметра B от параметра α при различных значениях минимальной толщины смазочного слоя $H_{\min}$. Видно, что, так же как и в случае неметаллического подшипника скольжения, B как функция α имеет максимум. Зависимости, приведенные на рис. 1.25 и 1.26, могут быть использованы для определения оптимальной толщины вкладыша для подшипников с углом охвата 120° .

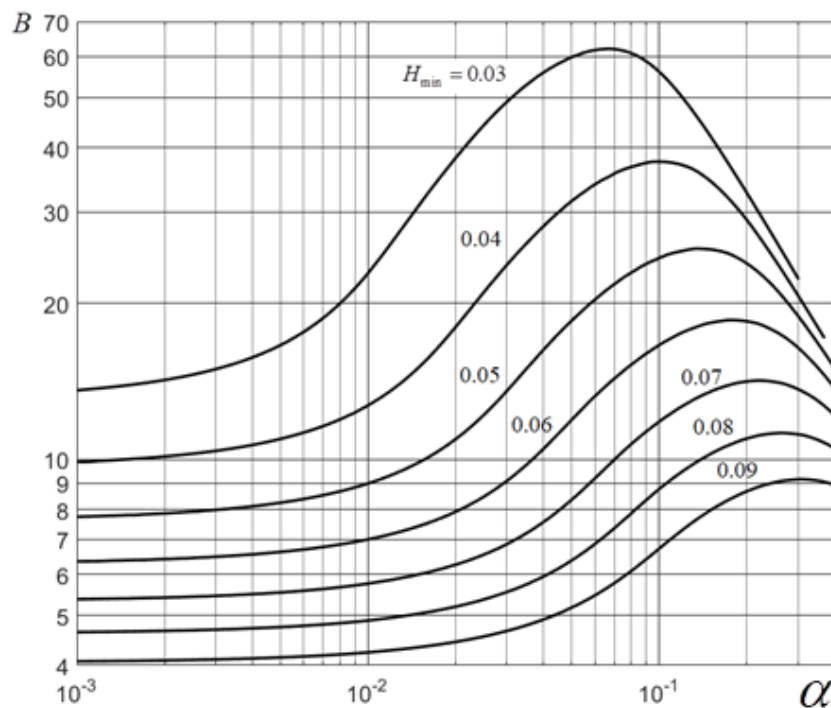


Рис. 1.25. Зависимость параметра B от параметра α при различных значениях параметра $H_{\min}$

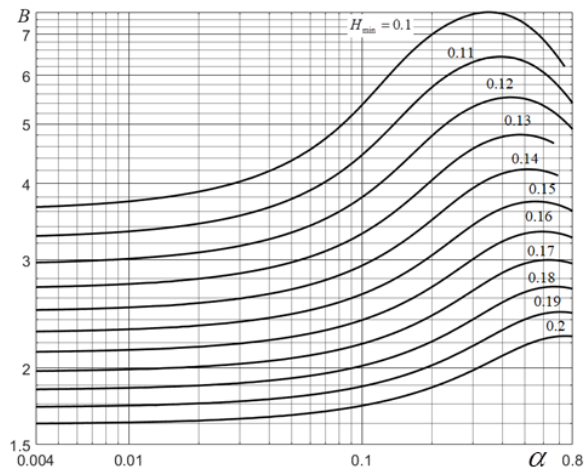


Рис. 1.26. Зависимость параметра B от параметра α при различных значениях параметра $H_{\min}$

Пример 1. Проведем расчеты и сравним с экспериментальными данными для подшипника с параметрами: $\theta = \frac{\pi}{3} = 1.0472 \text{ рад} = 60^\circ$, $d = 0.275 \text{ м}$, $L = 0.26 \text{ м}$, $E = 220 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $\psi = 7.25 \cdot 10^{-4}$, $u = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, нагрузка $Q = 4.6 \cdot 10^5 \text{ Н}$, масло T_{22} , $\mu_{40} = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $m = 2$. Температура масла на входе во входной карман $T_{\text{ex}} = 40^\circ \text{C}$. При скорости $u = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ считаем, что разогрев масла незначительный и принимаем вязкость масла равной его вязкости при 40°C , т. е. $\mu_0 = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Вычисляем:

- нагрузка на единицу длины подшипника $W = Q/L = 1.769 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$;
- по формулам (1.84), (1.87), (1.88) находим $p_0 = 19.92 \text{ МПа}$, $p_* = 2.49 \text{ МПа}$, $\alpha = 0.125$, $P = 0.646$, $B = P/V = 5.17$;
- по графикам на рис. 1.26 находим $H_{\min} \approx 0.115$;
- минимальная толщина смазочного слоя $h_{\min} = H_{\min} \psi R \approx 11.5 \text{ мкм}$.

Решая систему уравнений (1.94) при тех же значениях входных параметров, получаем $H_{\min} = 0.11$, $h_{\min} = 11 \text{ мкм}$. Точные значения близки к приближенным значениям, полученным с использованием приведенных графиков. Значение относительного эксцентриситета при этом равно $\lambda = 1.13$. Это означает, что недеформированный вал внедряется в недеформированную втулку на

глубину $0.13\psi R = 12.7 \text{ мкм}$. За счет деформаций появляется зазор между поверхностями, заполняемый смазочным слоем. Из этого следует, что отношение упругого перемещения деформируемых поверхностей при значении $\varphi = \varphi_\delta$ к минимальной толщине смазочного слоя $(w_0(\varphi_\delta) + w_1(\varphi_\delta))/h_{\min} > (0.13 + 0.079)/0.079 = 2.65$. Это означает, что деформации тел сильно влияют на толщину смазочного слоя и давление в нем.

Численные расчеты дают, что без учета деформаций $H_{\min} = 0.047$. При этом относительный эксцентриситет $\lambda = 0.953$. Размерная минимальная толщина смазочного слоя без учета деформаций $h_{\min} = 4.7 \text{ мкм}$, что более чем в два раза ниже минимальной толщины при учете деформаций.

На подшипнике с такими параметрами были проведены экспериментальные исследования, в которых измерялась толщина смазочного слоя. Результаты исследований опубликованы в работе [50]. Экспериментальное значение минимальной толщины смазочного слоя равно 11.6 мкм .

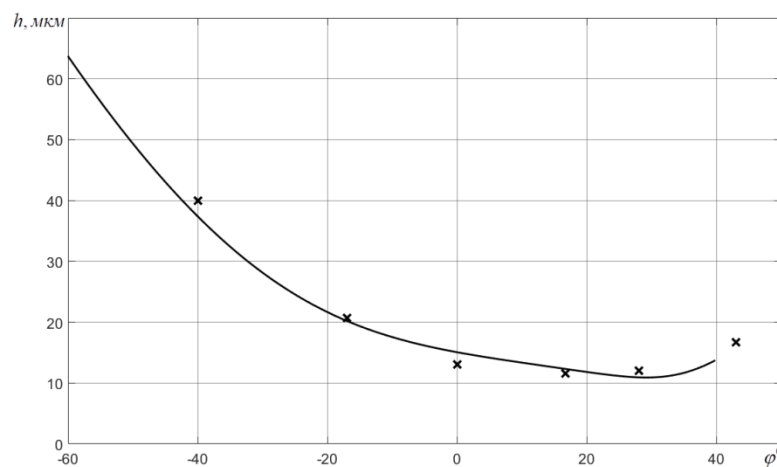


Рис. 1.27. Зависимости $h(\varphi)$ для подшипника с приведенными в примере 1 параметрами. Сплошная кривая – теоретическая зависимость. Крестики – экспериментальные данные, приведенные в работе [50].

На рис. 1.27 приведена расчетная зависимость $h(\varphi)$ и экспериментальные результаты, приведенные в [50] (обозначены на рис. 1.27 крестиками). Расчеты проводились при учете зависимости вязкости и плотности

смазочного материала от давления. Коэффициент зависимости вязкости смазочного материала от давления принимался равным $\alpha_p = 1.72 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$.

Данный пример показывает, что в крупногабаритных опорах скольжения при высоких нагрузках деформации тел учитывать необходимо.

Также данный пример показывает, что расчетные значения хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Точка с координатами $(\alpha = 0.125, B = 5.17)$ располагается на плоскости (α, B) на рис. 1.26 вблизи кривой $H_{\min} = 0.11$ в области роста зависимости $B(\alpha)$. Это означает, что повышение упругой податливости поверхностей тел приведет к росту минимальной толщины смазочного слоя. Повысить упругую податливость поверхностей можно, например, введением тонкого вкладыша с малым модулем упругости.

Пример 2. Проведем расчеты для подшипника с параметрами:

$$\theta = \frac{\pi}{3} = 1.0472 \text{ рад} = 60^\circ, \quad d = 0.6 \text{ м}, \quad L = 0.45 \text{ м}, \quad E = 220 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.3, \quad \psi = 5 \cdot 10^{-4}, \quad u = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

, нагрузка $Q = 4.6 \cdot 10^6 \text{ Н}$, масло T_{22} , $\mu_0 = 0.013 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Вычисляем:

- нагрузка на единицу длины подшипника $W = Q/L = 1.02 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$;
- по формулам (1.92), (1.95), (1.6) находим $p_0 = 13.73 \text{ МПа}$, $p_* = 10.4 \text{ МПа}$, $\alpha = 0.7571$, $P = 2.481$, $B = 3.276$;
- по графикам на рис. 1.26 находим $H_{\min} \approx 0.165$;
- минимальная толщина смазочного слоя $h_{\min} = H_{\min} \psi R \approx 24.75 \text{ мкм}$.

Решая систему уравнений (1.94) при тех же значениях входных параметров, получаем $H_{\min} = 0.16$, $h_{\min} = 24 \text{ мкм}$. Точные значения близки к приближенным значениям, полученным с использованием приведенных графиков.

Отметим, что в данном случае деформации тел превышают значения, при которых они дают максимальный положительный эффект при полученном значении минимальной толщине смазочного слоя. Это следует из положения точки с координатами $(\alpha = 0.7571, B = 3.276)$ на плоскости (α, B) на рис. 1.26.

Значение относительного эксцентриситета при этом равно $\lambda = 1.545$. Это означает, что недеформированный вал внедряется в недеформированную втулку на глубину $0.545\psi R = 81.75 \text{ мкм}$. За счет деформаций появляется зазор между поверхностями, заполняемый смазочным слоем. Из этого следует, что отношение упругого перемещения деформируемых поверхностей при значении $\varphi = \varphi_\delta$ к минимальной толщине смазочного слоя $(w_0(\varphi_\delta) + w_1(\varphi_\delta))/h_{\min} > (0.545 + 0.16)/0.16 = 4.41$.

Используя графики, приведенные на рис. 1.26, находим, что, если не учитывать деформации, то при заданной нагрузке значение $H_{\min}$ близко к значению 0.11, но меньше его. Численные расчеты дают, что без учета деформаций $H_{\min} = 0.109$, $h_{\min} = 16.35 \text{ мкм}$. При этом относительный эксцентриситет $\lambda = 0.89$.

На рис. 1.28 приведены расчетные зависимости $h(\varphi)$, $p(\varphi)$ с учетом деформаций (кривые 1) и без учета деформаций (кривые 2).

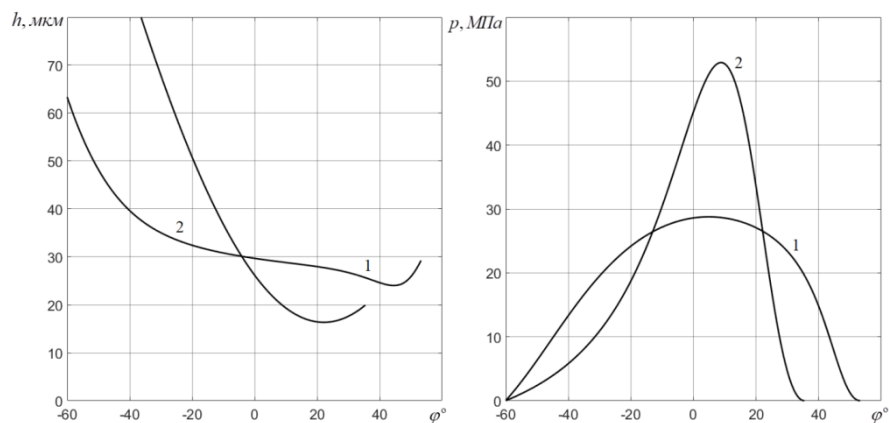


Рис. 1.28. Расчетные зависимости $h(\varphi)$, $p(\varphi)$ для примера с приведенными в примере 2 параметрами

Таким образом, для рассматриваемого крупногабаритного подшипника деформации повышают минимальную толщину смазочного слоя в 1.48 раз и понижают максимальное давление в 1.84 раза.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 1.27, 1.28, показывают, что также как и в случае неметаллических подшипников скольжения при каждом

значении $H_{\min}$ существует значение параметра $\alpha = \alpha_*$, при котором коэффициент нагруженности B , как функция параметра α , принимает максимальное значение. На рис. 1.29 – 1.31 приведены зависимости, аналогичные зависимостям, представленным на рис. 1.20 - 1.22 для неметаллических подшипников скольжения. Здесь α_* - значение параметра α , при котором деформации обеспечивают максимальный коэффициент нагруженности при заданном значении $H_{\min}$. Параметр λ_* равен значению λ при значении $\alpha = \alpha_*$.

Приведенные результаты показывают, что деформации могут повышать коэффициент нагруженности подшипника в несколько раз.

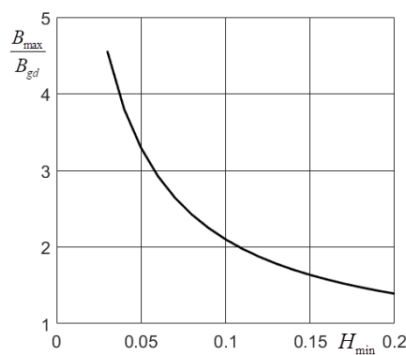


Рис. 1.29

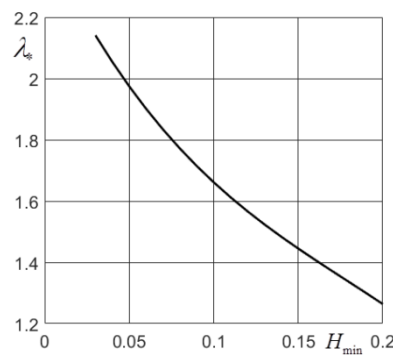


Рис. 1.30

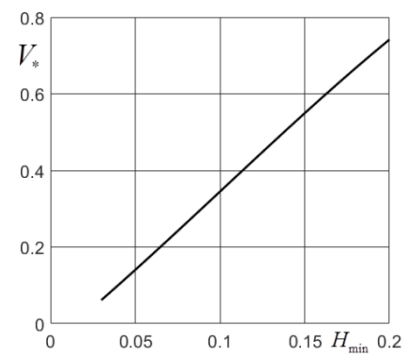


Рис. 1.31

На рис. 1.32б приведена зависимость отношения максимального значения коэффициента нагруженности $B_{\max}$ к его значению при не учете деформаций B_0 от $H_{\min} = h_{\min}/\Delta$. Из приведенных результатов следует, что деформации могут многократно (более чем в 9 раз при $H_{\min} = 0.01$) повысить несущую способность подшипника. При $H_{\min} > 0.35$ деформации слабо влияют на несущую способность подшипника и этим влиянием можно пренебречь.

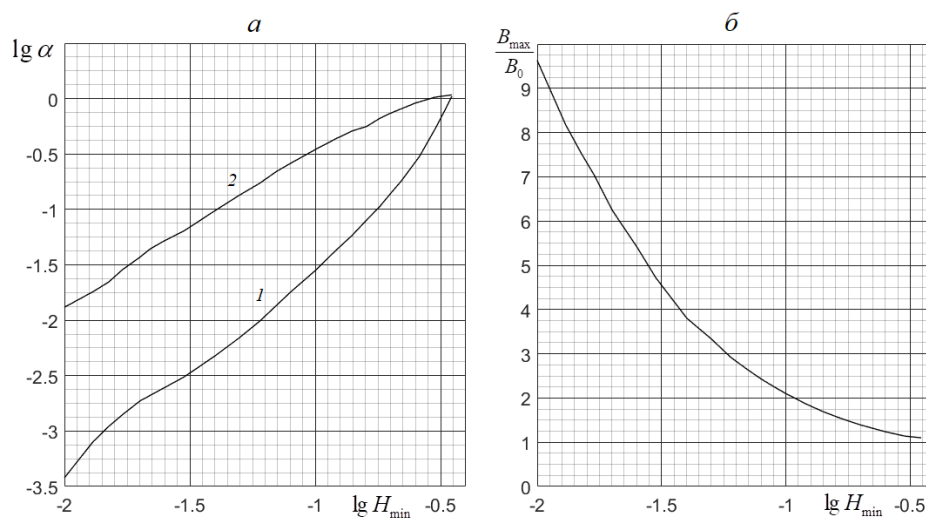


Рис. 1.32

На рис. 1.32а (кривая 2) приведена зависимость коэффициента податливости, при котором деформации максимально повышают несущую способность подшипника, от параметра $H_{\min}$.

Кривая 1 – график зависимости коэффициента податливости, при котором деформации увеличивают несущую способность на 10 процентов, от параметра $H_{\min}$. При значениях α и $H_{\min}$, при которых точки с данными координатами на рис. 3а расположены ниже кривой 1, влияние деформаций мало (не более чем на 10 процентов) и ими можно пренебречь. Приведенные выше результаты получены при угле охвата подшипника $2\pi/3$.

Из приведенных на рис. 1.32 результатов следует, что в интервале значений $0.01 \leq H_{\min} \leq 0.35$ и при значениях

$\alpha \leq H_{\min} (0.053 + 0.336H_{\min} + 34.4H_{\min}^2 - 193H_{\min}^3 + 458H_{\min}^4)$ деформации можно не

учитывать. При значениях критерия $H_{\min} > 0.35$ расчеты следует выполнять без учета деформаций по гидродинамической (ГД) теории смазки.

1.6. УГД задача смазки упругого цилиндра и упругого пространство с цилиндрическим вырезом при наличии тонкого упругого вкладыша с малым модулем упругости.

Из приведенных выше результатов следует, что деформации могут существенно повышать нагрузочную способность смазочного слоя. Выше рассмотрены 2 модели подшипника. Первая модель состоит из жесткого вала и жесткого корпуса при наличии тонкого упругого вкладыша. Вторая модель состоит из упругого вала и упругого пространства с цилиндрическим вырезом. Покажем, что введением во вторую модель тонкого упругого вкладыша с малым модулем упругости можно повысить несущую способность подшипника при фиксированной минимальной толщине смазочного слоя.

При наличии тонкого упругого вкладыша выражение для толщины смазочного слоя можно представить в виде

$$h(\varphi) = \Delta - \delta \cos(\varphi - \theta) - \frac{4R(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-\varphi}^{\varphi} p(\xi) \left[\cos(\varphi - \xi) \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right] + \\ + \varepsilon \frac{(1+\nu_l)(1-2\nu_l)}{1-\nu_l} \frac{p}{E_l}$$

где ν_l, E_l - коэффициент Пуассона и модуль упругости вкладыша. В безразмерных переменных, определенных в предыдущем разделе, уравнение принимает вид

$$h(\varphi) = 1 - \chi \cos(\varphi - \theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi}^{\varphi} p(\xi) \left[\cos(\varphi - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right] d\xi + \beta p$$

где $\beta = \frac{1}{8\pi} \frac{(1+\nu_l)(1-2\nu_l)}{(1-\nu^2)(1-\nu_l)} \frac{\varepsilon}{R} \frac{E}{E_l}$

Приведенное выражение может быть использовано при выполнении условий

$$\frac{\varepsilon}{R} \ll 1, \beta \ll 1/$$

Система конечно-разностных уравнений данной задачи отличается от системы предыдущей задачи только наличием дополнительного слагаемого βp_i в правой части (1.90). Метод решения системы в данном случае ничем не отличается от предыдущего случая.

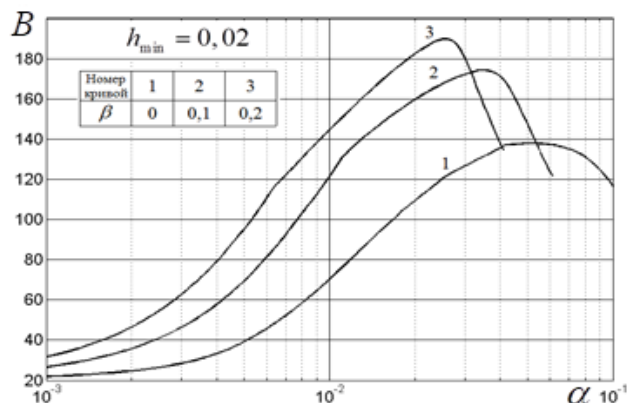


Рис. 1.33. Зависимости B от V при различных значениях β

На рис. 1.33 представлены зависимости $B(\alpha)$ при $H_{\min} = 0,02$ и трех значениях β : $\beta = 0$; $\beta = 0,01$ и $\beta = 0,02$.

Из приведенных зависимостей следует, что введение тонкого вкладыша с малым модулем упругости приводит к повышению максимума несущей способности смазочного слоя и смещает в область более низких значений параметр V , при котором функция $B(V)$ имеет максимум.

1.7. Плоская неизотермическая плоская задача для радиального подшипника скольжения.

При высоких скоростях существенное влияние на рабочие характеристики подшипника оказывает тепловыделение в смазочном слое. Часть тепла, выделившегося в рабочей зоне зазора подшипника, уходит в окружающие масло тела, а оставшаяся часть - уносится из рабочей зоны маслом. Математическое описание тепловых явлений в подшипнике с учетом

деформаций тел должно включать в себя совместное решение уравнений энергии для смазочного слоя и окружающих его тел, уравнений термоупругости для вала и подшипника и уравнений гидродинамики для смазочного слоя при определенных условиях. Такими условиями являются условия непрерывности температуры и теплового потока на поверхностях раздела между смазочным слоем и окружающими его телами и приведенные выше условия, которым должна подчиняться функция распределения гидродинамического давления. Решение задачи в такой постановке представляет большие математические трудности, поэтому в данной работе она решается при некоторых упрощающих допущениях.

Одним из допущений является пренебрежение влиянием на характеристики подшипника деформаций поверхностей, обусловленных неравномерным распределением температуры в окружном направлении. Это допущение налагает ограничения на область применимости приведенных ниже результатов, однако, позволяет вместо термоупругих деформаций рассматривать только упругие деформации, а тепловое расширение тел учитывать посредством изменения первоначального радиального зазора на некоторую величину, определяемую радиальным тепловым расширением тел. Выведем условия, при выполнении которых использование данного допущения не приведет к большим погрешностям.

Изменение температуры в окружном направлении в вале вследствие его вращения будет иметь место только в поверхностном слое, толщина которого

δ имеет порядок величины $\delta \approx \sqrt{\frac{R\lambda_{\theta}}{\rho_{\theta}c_{\theta}u}}$.

Здесь $\rho_{\theta}, c_{\theta}, \lambda_{\theta}$ - плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности вала. Отсюда следует, что при $u > 1 \text{ м/с}$ отношение $\delta/R < 0.03\sqrt{R}$, то есть применительно к опорам валков прокатных станов величина мала по сравнению с радиусом вала, поэтому влиянием изменения температуры вала в окружном направлении на его тепловое расширение можно пренебречь.

Отклонение формы внутренней поверхности вкладыша от круговой, обусловленное неравномерным распределением его температуры в окружном направлении, можно приближенно оценить следующим образом. Рассмотрим кольцо, имеющее при температуре T внутренний радиус R и наружный R_1 .

Если это кольцо разогреть таким образом, что температура в окружном направлении не меняется, а по радиусу перепад температуры на внутренней поверхности и наружной поверхности будет ΔT , то внутренний радиус R увеличится на величину Δ_2 , равную

$$\Delta_2 = \alpha_2 R \Delta T \left[-0.5 + 0.25 \frac{R_1^2 - R^2}{R^2 \ln \left(\frac{R_1}{R} \right)} \right] \left\{ 1 + \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)} \frac{R^2}{R_1^2 - R^2} + \frac{(1+\nu_2)}{(1-\nu_2)} \frac{R^3}{R_1 (R_1^2 - R^2)} \right\} \quad (1.95)$$

Здесь α_2 - коэффициент теплового расширения втулки. Выражение (1.95) следует из решения задачи о температурных напряжениях для полого цилиндра, приведенного в [48].

В опорах валков прокатных станов отношение $R_1/R \approx 2$ и при $\nu_2 = 0.3$ равенство (1.95) принимает вид $\Delta_2 \approx 0.9 \alpha_2 R \Delta T$. Отсюда следует, что если перепад температуры по угловой координате в рабочей зоне на поверхности вкладыша будет ΔT , то разница Δ_1 между наибольшим и наименьшим внутренними радиусами вкладыша в рабочей зоне будет иметь порядок $\Delta_1 \leq 0.9 \alpha_2 R \Delta T$.

Полагаем, что при выполнении условия $\Delta_1 \ll \psi R$ можно пренебречь неравномерностью теплового расширения вкладыша. Данное условие будет выполняться, если будет выполняться условие

$$0.9 \alpha_2 \Delta T \ll \psi. \quad (1.96)$$

Таким образом, если выполняется условие (1.96), то можно считать, что при отсутствии силовых деформаций внутренняя поверхность вкладыша является круговым цилиндром.

Из сказанного следует, что приращение ΔR внутреннего радиуса вкладыша приближенно можно определить по формуле $\Delta R = 0.9\alpha_2 R(T_g - T_n)$, где T_g - средняя температура внутренней поверхности вкладыша, T_n - средняя температура наружной поверхности подшипника. Увеличение радиуса шипа равно $\Delta r = \alpha_1 r(T_c - T_{ок})$, где T_c - средняя температура шипа, $T_{ок}$ - температура окружающей среды. Отсюда следует, что при принятых допущениях значение относительного радиального зазора подшипника с учетом тепловых деформаций равно $\psi^* = \psi + 0.9\alpha_2(T_g - T_n) - \alpha_1(T_c - T_{ок})$. Как правило, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $T_g \approx T_c$ и в итоге получаем следующее выражение для ψ^*

$$\psi^* = \psi - 0.1\alpha(T_c - T_{ок}) \quad (1.97)$$

При определении средней температуры вала T_c полагаем, что она равна средней температуре сливаемого смазочного материала. В таком случае эту температуру можно определить путем решения уравнения

$$\rho c Q(T_c - T_{вх}) = Q_T \quad (1.98)$$

где Q - объемный расход смазки (количество смазочного материала, вытекающего из подшипника за единицу времени), $T_{вх}$ - температура подаваемой смазки во входной и выходной масляные карманы, Q_T - количество теплоты, выделившейся в смазке при ее прохождении через рабочую и нерабочую области.

При проведении экспериментальных исследований объемный расход смазки Q может измеряться. В таком случае представляет интерес проведение расчета при известном значении Q . При расчете проектируемых опор скольжения расход Q необходимо рассчитывать. Методика расчета расхода Q изложена в [50]. Согласно данной методике расход Q состоит из четырех составляющих: расходов через нагруженную и ненагруженную зоны

и расходов через входной и выходной масляные карманы. Расход через нагруженную зону мал, и им можно пренебречь. Расход через масляные карманы можно определить по формулам

$$Q_1 = \frac{\psi^3 R^4}{6\mu_c} \frac{p_n}{H_k} \int_{-\theta-\varphi_k}^{-\theta} (1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta))^3 d\varphi, \quad Q_2 = \frac{\psi^3 R^4}{6\mu_c} \frac{p_n}{H_k} \int_{\theta}^{\theta+\varphi_k} (1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta))^3 d\varphi$$

Здесь μ_c - вязкость смазочного материала при температуре T_c , p_n - давление подачи смазочного материала во входной и выходной масляные карманы, H_k - ширина зазора между масляными карманами и торцами вкладыша, Q_1 - расход смазочного материала через выходной масляный карман, Q_2 - расход смазочного материала через входной масляный карман.

Расход через ненагруженную зону можно определить по формуле

$$Q_3 = \frac{\psi^3 R^4}{3\mu_c} \frac{p_n}{L} \int_{\theta+\varphi_k}^{2\pi-(\theta+\varphi_k)} (1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta))^3 d\varphi$$

Температура смазки может существенно изменяться по толщине смазочного слоя. Это приводит к изменению плотности и вязкости смазки по толщине смазочного слоя. Изменение плотности невелико и слабо влияет на развиваемое давление, а изменение вязкости смазки может происходить в несколько раз и влияние на давление может быть существенным. Уравнение Рейнольдса, учитывающее это изменение, имеет вид [90]

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\rho \bar{F}_2(\varphi, h) \frac{dp}{d\varphi} \right) - \frac{u}{R} \frac{d}{d\varphi} \left(\rho \frac{\bar{F}_3(\varphi, h)}{\bar{F}_1(\varphi, h)} \right) = 0$$

$$\bar{F}_2(\varphi, h) = \int_0^h \frac{\tilde{y}^2}{\mu(\varphi, \tilde{y})} d\tilde{y} - \frac{\left(\int_0^h \frac{\tilde{y}}{\mu(\varphi, \tilde{y})} d\tilde{y} \right)^2}{\int_0^h \frac{d\tilde{y}}{\mu(\varphi, \tilde{y})}}, \quad \bar{F}_1(h) = \int_0^h \frac{d\tilde{y}}{\mu(\varphi, \tilde{y})}, \quad \bar{F}_3(h) = \int_0^h \frac{\tilde{y}}{\mu(\varphi, \tilde{y})} d\tilde{y}$$

Координата $\tilde{y}$ направлена по толщине смазочного слоя, $0 \leq \tilde{y} \leq h$. Поверхности вращающегося вала соответствует $\tilde{y} = 0$. Зависимость вязкости от давления и температуры аппроксимируем формулой, используемой для масел, применяемых в прокатных станах [49, 50] и имеющей вид

$$\mu(\varphi, \tilde{y}) = \mu_{40} \left(\frac{40}{T(\varphi, \tilde{y})} \right)^m \exp(\alpha_p p(\varphi))$$

Здесь μ_{40} - вязкость масла при температуре 40°C и атмосферном давлении (содержится в справочниках).

В уравнении энергии учтем только тепловыделение от сдвига. Тепловыделением от сжатия смазки пренебрегаем[12]. Учитываем также конвективный перенос тепла по угловой координате. В результате уравнение энергии для смазочного слоя запишем в виде

$$\rho c \frac{u_\varphi}{R} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2} + \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \tilde{y}} \right)^2$$

где

$$u_\varphi = u \left(1 - \frac{\int_0^{\tilde{y}} \frac{d\xi}{\mu(\xi)}}{\int_0^h \frac{d\xi}{\mu(\xi)}} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \left[\frac{\int_0^h \frac{\xi d\xi}{\mu(\xi)}}{\int_0^h \frac{d\xi}{\mu(\xi)}} \int_0^{\tilde{y}} \frac{d\xi}{\mu(\xi)} - \int_0^{\tilde{y}} \frac{\xi d\xi}{\mu(\xi)} \right]$$

Выражение для толщины смазочного слоя принимаем в виде (1.83). Перейдем к граничным условиям для уравнения энергии. Принимаем, что на входе в рабочий зазор температура смазки равна T_c . Теплоотвод из смазки во вращающийся вал существенно превышает теплоотвод во втулку, поэтому теплоотводом во втулку пренебрегаем. В результате получаем граничные условия для уравнения энергии на входе в рабочий зазор и на границе между смазочным слоем и втулкой.

$$T(\varphi, \tilde{y})|_{\varphi=-\varphi_c} = T_c, \quad \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}}|_{\tilde{y}=h} = 0, \quad -\vartheta \leq \varphi \leq \varphi_c.$$

Перейдём условиям, которым должна удовлетворять температура масла на границе между смазочным слоем и валом, то есть при $y=0$. Обычно принимается условие постоянства температуры по угловой координате, так как предполагается, что вследствие вращения вала перепад его температуры в окружном направлении невелик. Однако при малых толщинах смазочного слоя и высоких скоростях вращения тепловой поток из слоя масла в шип может быть значительным, вследствие чего перепад температуры на

поверхности вала в окружном направлении может достигать десятков градусов. В связи с этим учтем влияние изменения температуры вала в окружном направлении на характеристики подшипника. Очевидно, что теплопроводностью в вале в окружном направлении можно пренебречь, так как изменение его температуры по угловой координате происходит в тонком поверхностном слое. Мысленно вырежем в вале достаточно узкий сектор. Примем допущение о том, что за время прохождения этого сектора через нерабочую зону подшипника в нём установится постоянная температура, равная T_c .

При прохождении этого сектора через рабочую зону в него будет идти из смазочного слоя тепловой поток величиной $q = \lambda (\partial T / \partial \tilde{y})|_{\tilde{y}=0}$. Температуру на поверхности сектора можно получить путем решения нестационарного уравнения теплопроводности. Применяя к нему преобразование Лапласа [9], решая полученное уравнение относительно образа функции $T(\varphi, \tilde{y})$ и выполняя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$T(\varphi, y)|_{y=0} = T_c + \frac{a_2 \lambda}{\sqrt{\pi} \lambda_2} \sqrt{\frac{R}{u}} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{\partial T}{\partial \tilde{y}} \bigg|_{\tilde{y}=0} \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi - \xi}}$$

Здесь $a_2 = \sqrt{\lambda_2 / (\rho_2 c_2)}$, λ_2, ρ_2, c_2 - коэффициент теплопроводности, плотность и теплоемкость вкладыша соответственно.

Введем безразмерные переменные по формулам (1.84) и по формулам $t = T/T_c$, $\bar{u}_\varphi = u_\varphi/u$, $y = \tilde{y}/h$. В безразмерных переменных уравнения и условия задачи принимают вид

$$H(\varphi) = 1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} q(\xi) \left[\cos(\varphi - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right] d\xi \quad (1.99)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\bar{\rho} F_2(\varphi) H^3 \exp(Gq(\varphi)) \frac{dq}{d\varphi} \right) - \alpha \frac{d}{d\varphi} (\bar{\rho} H F_0(\varphi)) = 0 \quad (1.100)$$

$$\bar{\rho} = 1 + \frac{C_1 q}{1 + C_2 q} \quad (1.101)$$

$$F_2(\varphi) = 12 \left(\int_0^1 (t_c t(\varphi, y))^m y^2 dy - \frac{(F_3(\varphi))^2}{F_1(\varphi)} \right), F_0(\varphi) = 2 \frac{F_3(\varphi)}{F_1(\varphi)}, \quad (1.102)$$

$$F_1(\varphi) = \int_0^1 (t_c t(\varphi, y))^m dy, F_3(\varphi) = \int_0^1 (t_c t(\varphi, y))^m y dy$$

$$(t_c - 1) = K_2 \frac{q_T}{t_c^m}, K_2 = \frac{L \mu_{ex} u^2}{\rho_0 c Q T_{ex} \psi} \quad (1.103)$$

если расход смазочного материала задан и равен Q , и

$$(t_c - 1) = K_2' \frac{q_T}{t_c^{2m}}, K_2' = \frac{6 \mu_{ex}^2 u^2 L H_k}{\rho_0 c p_H T_{ex} R^4 \psi^4 \bar{Q}} \quad (1.104)$$

если расход смазочного материала определяется в процессе расчетов.

Здесь

$$q_T = \int_{-\theta}^{\varphi_c} \left(\int_0^1 \frac{\exp(Gq)}{t^m} \left(\frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial \bar{y}} \right)^2 d\bar{y} \right) d\varphi \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q} = & \int_{-\theta-\varphi_k}^{-\theta} (1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta))^3 d\varphi + \int_{\theta}^{\theta+\varphi_k} (1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta))^3 d\varphi + \\ & + 2 \frac{H_k}{L} \int_{\theta+\varphi_k}^{2\pi-(\theta+\varphi_k)} (1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_\delta))^3 d\varphi \end{aligned} \quad (1.106)$$

$$H^2 \bar{u}_\varphi \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \Lambda \frac{\exp(Gq)}{(t_c t(\varphi, y))^m t_c} \left(\frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial y} \right)^2, \quad 0 < y < 1, \quad -\vartheta < \varphi < \varphi_c \quad (1.107)$$

$$t_c = \frac{T_c}{T_{ex}}, Pe = \frac{\rho_0 c u \Delta^2}{\lambda R}, \Lambda = \frac{\mu_0 u R}{\Delta^2 \rho_0 c T_0},$$

$$\bar{u}_\varphi = 1 - \frac{I_1(\varphi, \bar{y})}{I_1(\varphi, 1)} - \frac{6 H^2 t_c^m}{\alpha \exp(Gp)} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \left[\frac{I_2(\varphi, 1)}{I_1(\varphi, 1)} I_1(\varphi, \bar{y}) - I_2(\varphi, \bar{y}) \right],$$

$$I_1(\varphi, \bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} (t(\varphi, \xi))^m d\xi, I_2(\varphi, \bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \xi (t(\varphi, \xi))^m d\xi,$$

$$q(-\theta) = q(\varphi_c) = \left. \frac{dq}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_c} = 0, \quad (1.108)$$

$$\left. \frac{\partial t(\varphi, y)}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad -\vartheta \leq \varphi \leq \varphi_c \quad (1.109)$$

$$t(\varphi, 0) = 1 + K \int_{-\theta}^{\varphi} \frac{\left. \frac{\partial t(\varphi, y)}{\partial y} \right|_{y=0} d\xi}{H(\varphi) \sqrt{\varphi - \xi}}, \quad K = \frac{a_2 \lambda}{\sqrt{\pi} \lambda_2 \psi R} \sqrt{\frac{R}{u}}, \quad -\theta \leq \varphi \leq \varphi_c \quad (1.110)$$

Метод численного решения неізотермической задачи. Входными параметрами задачи, значения которых необходимо задать до начала вычислений, являются $\alpha, P_c, \Lambda, m, G, K, K_2, C_1, C_2$. Неизвестными, значения которых необходимо определить в процессе решения задачи, являются параметры t_c, φ_c, λ , функции $H(\varphi), q(\varphi), \rho(\varphi), \bar{\mu}(\varphi)$ в области $(-\vartheta \leq \varphi \leq \varphi_c)$ и функцию $t(\varphi, y)$ в области $(-\theta \leq \varphi \leq \varphi_c, 0 \leq y \leq 1)$.

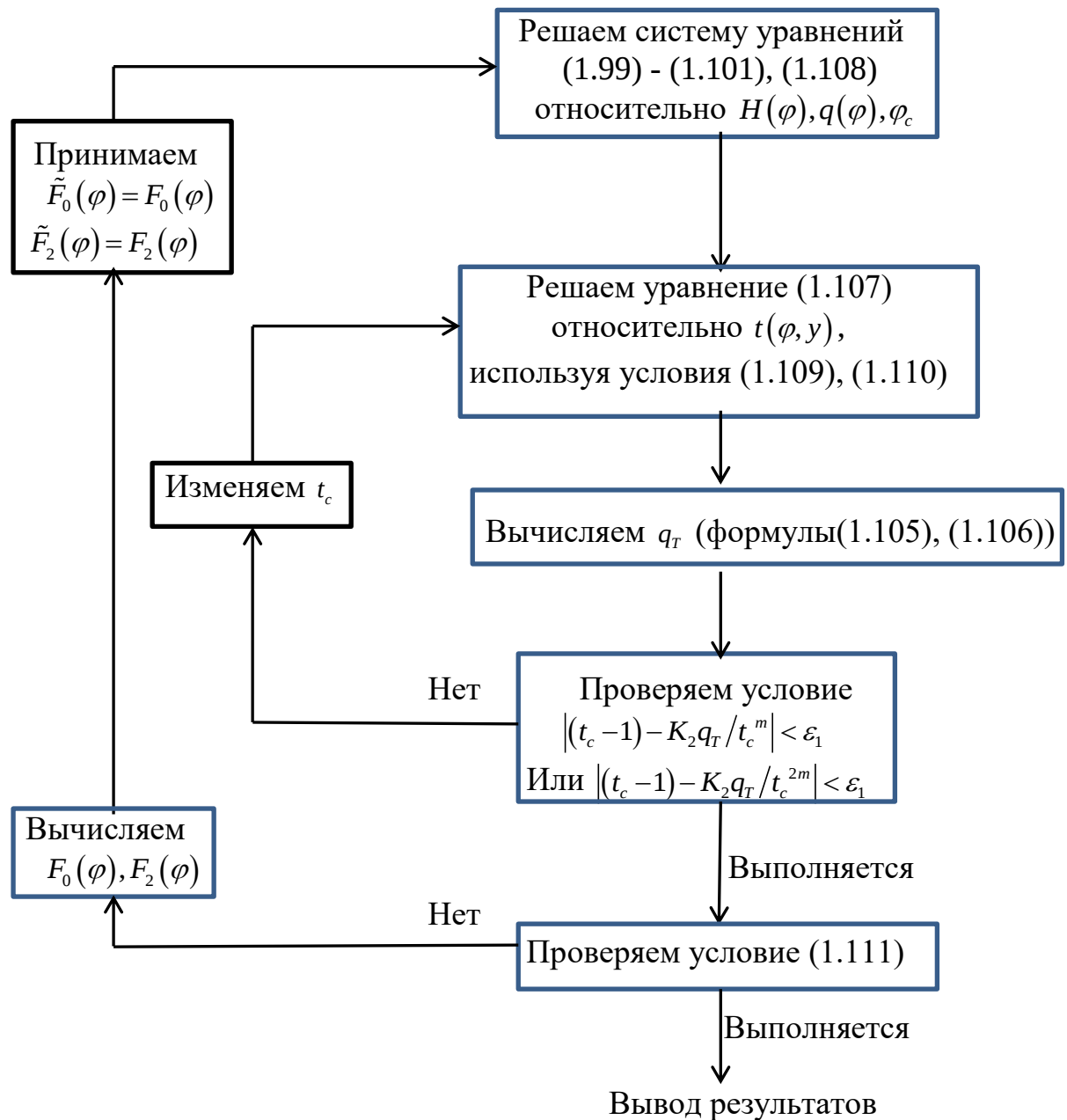


Рис. 1.34. Блок-схема алгоритма решения задачи (1.99)-(1.110).

На рис. 1.34 приведена блок-схема алгоритма решения задачи. Предварительно задаем начальные приближения $t_c = t_c^{(0)} = 1$, $\varphi_c = \varphi_c^{(0)}$, $\lambda = \lambda^{(0)}$, $q(\varphi) = q^{(0)}(\varphi)$, $t(\varphi, y) = t^{(0)}(\varphi, y) = 1$. Также определяем дополнительные функции $\tilde{F}_0(\varphi) = 1, \tilde{F}_2(\varphi) = 1$. В процессе вычисления выход из итераций будет определяться выполнением условий

$$\max_{\varphi} |F_0(\varphi) - \tilde{F}_0(\varphi)| < \varepsilon, \max_{\varphi} |F_2(\varphi) - \tilde{F}_2(\varphi)| < \varepsilon \quad (1.111)$$

где ε - заданная погрешность

С ростом t_c от значения $t_c = 1$ левая часть уравнения (1.103), или (1.104) линейно возрастает от нулевого значения. При заданных функциях $H(\varphi), q(\varphi)$ правая часть монотонно падает от положительного значения. Это означает, что уравнения (1.103) и (1.104) имеют единственное решение $t_c > 1$.

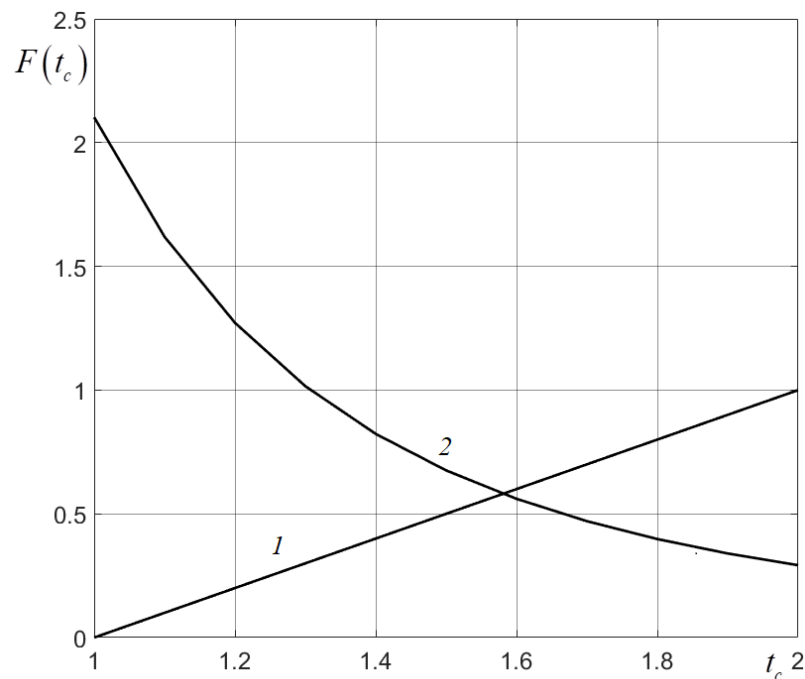


Рис. 1.35

Сказанное наглядно иллюстрирует рис. 1.35, на котором приведены график функции $F_{\lambda}(t_c) = t_c - 1$ (кривая 1) и график функции $F_{np}(t_c) = K_2 \frac{q_r}{t_c^m}$ (кривая 2)

при значениях параметров $\alpha = 0.24$, $P_e = 7.75$, $\Lambda = 0.043$, $m = 2$, $G = 0.47$,
 $K = 0.008$, $K_2 = 0.28$, $C_1 = 0.017$, $C_2 = 0.047$. При этом сначала решалась задача
(1.99) - (1.101), (1.108). Затем принималось $F_0(\varphi) = 1, F_2(\varphi) = 1$, и при
различных значениях t_c решалась задача (1.107), (1.109), (1.110). Далее
определялось значение q_T по формуле (1.105) и значение $F_{np}(t_c) = K_2 q_T / t_c^m$.

Метод решения системы уравнений (1.109) – (1.101) при условиях
(1.108) и при значениях $F_2(\varphi) = F_0(\varphi) = 1$ изложен выше. В общем случае, когда
функции $F_2(\varphi), F_0(\varphi)$ известны и отличны от единицы, вместо уравнения
(1.91) решаем уравнение

$$\bar{\rho}_{i+1} \left(\frac{H_i + H_{i+1}}{2} \right)^3 F_{2,i+1} \frac{\exp(-Gq_{i+1}) - \exp(-Gq_i)}{G(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} = -\alpha F_{0,i+1} (\bar{\rho}_{i+1} H_i - H_0) \quad (1.112)$$

где $F_{2,i+1} = F_2(\varphi_{i+1}), F_{0,i+1} = F_0(\varphi_{i+1})$. При этом функция $F(x)$ и коэффициенты A_{N-1} ,
 b_{N-1} в (1.93) примут вид

$$F(x) = \frac{F_{2,N}}{G(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} [1 - \exp(-Gx)], \quad A_{N-1} = -\alpha F_{0,N} a_{N-1} + V F_{0,N} H_0, \quad b_{N-1} = V F_{0,N} a_{N-1}$$

Метод решения уравнения (1.93) остается прежним.

Уравнение (1.107) при условиях (1.109), (1.110) решаем следующим
образом. При значении $\varphi = \varphi_1 = -\theta$ функция $t(\varphi_1, y) = 1$, $0 \leq y \leq 1$. На отрезке $[0,1]$
оси y вводим равномерную сетку $\{y_k\}, k=1, \dots, N_y$, $y_1 = 0$, $y_{N_y} = 1$. Имеем
 $t_{1,k} = t(\varphi_1, y_k) = 1$, $k=1, \dots, N_y$. Пусть известны значения $t_{i-1,k} = t(\varphi_{i-1}, y_k)$, $k=1, \dots, N_y$.
Значения $t_{i,k} = t(\varphi_i, y_k)$, $k=1, \dots, N_y$ находим следующим образом.

Заменяя в (1.107) производные конечными разностями, получаем

$$H^2 \bar{u}_{i,k} \frac{t_{i,k} - t_{i,k-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}} = \frac{1}{Pe} \frac{t_{i,k+1} - 2t_{i,k} + t_{i,k-1}}{(\Delta y)^2} + \Lambda \frac{\exp(Gq_i)}{(t_c t_{i,k})^m t_c} \left(\frac{\bar{u}_{i,k+1} - \bar{u}_{i,k-1}}{2\Delta y} \right)^2, \quad k=2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (1.113)$$

Для условий (1.109), (1.110) принимаем следующие схемы

$$t_{i,N_y} = t_{i,N_y-1} \quad (1.114)$$

$$t_{i,1} = 1 + K \sum_{j=2}^i \frac{2}{H_j} \frac{(t_{j,2} - t_{j,1})}{\Delta y} (\sqrt{\varphi_i - \varphi_{j-1}} - \sqrt{\varphi_i - \varphi_j}) \quad (1.115)$$

При известных значениях параметров t_c , $t_{j,k}$, $j=1,...,i-1$, $k=1,...,N_y$ уравнения (1.113) – (1.115) представляют собой систему N_y уравнений относительно N_y неизвестных $t_{i,k}$, $k=1,...,N_y$. Данная система уравнений решается методом Ньютона.

Исследуем влияние тепловыделения в смазочном слое на характеристики подшипника. На рис. 1.36 показана зависимость коэффициента нагруженности от коэффициента податливости α при различных значениях параметра $S = \Lambda P_e$. Кривая 1 - $S=0$, 2 - $S=0.1$, 3 - $S=0.2$, 4 - $S=0.4$, 5 - $S=0.6$, 6 - $S=1$. Кривые получены при значении $P_e = 10$.

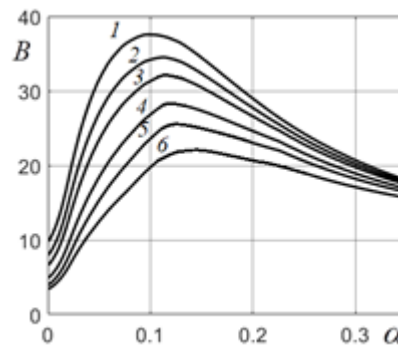


Рис. 1.36

На рис. 1.36 видно, что при малых значениях коэффициента податливости α значение коэффициента нагруженности B существенно падает с ростом значения параметра S , в то время как при больших значениях α значение B практически не зависит от S .

Это означает, что деформации поверхностей трения и тепловые процессы в подшипнике необходимо рассматривать совместно с учетом их взаимного влияния друг на друга.

Решения плоской неизотермической задачи и сопоставление теории и эксперимента приведены в главе 5.

1.8. Неизотермическая УГД задача смазки радиального подшипника конечной длины.

Из результатов экспериментальных исследований следует, что зазор в тяжелонагруженном радиальном подшипнике скольжения значительно изменяется вдоль его оси [49]. Это изменение обусловлено, с одной стороны, переменным характером деформаций по оси подшипника, а с другой стороны – прогибом вала, расположенного на двух опорах, под действием нагрузки. В подшипниках с самоустанавливающимися подушками влияние второго фактора на форму зазора снижается. Упругие перемещения поверхностей вала и подшипника будем определять следующим образом.

Подшипник моделируем круговым цилиндром с радиусами R (внутренним), R_1 (наружным) и длиной L . Введем цилиндрическую систему координат

$O r \varphi Z$, начало которой расположим на оси цилиндра, $0 \leq Z \leq L$, $R \leq r \leq R_1$.

Полагаем, что внешняя поверхность цилиндра жестко закреплена, а к внутренней поверхности приложено давление $p(\varphi, Z)$, под действием которого возникают ее перемещения $w(\varphi, Z)$.

Пусть $u_r(r, \varphi, Z)$, $u_\varphi(r, \varphi, Z)$, $u_z(r, \varphi, Z)$ упругие перемещения точек

цилиндра. Введем безразмерные переменные $\bar{r} = r/R$, $z = Z/L$,

$1 \leq \bar{r} \leq 1 + H/R$, $0 \leq z \leq 1$, $H = R_1 - R$ - толщина цилиндра, $\bar{u}_r = u_r/\Delta$,

$\bar{u}_\varphi = u_\varphi/\Delta$, $\bar{u}_z = u_z/\Delta$, Δ - радиальный зазор.

В области $\left\{ 1 \leq \bar{r} \leq \frac{H}{R}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1 \right\}$ вводим трехмерную равномерную

сетку координат $\{\bar{r}_i, \varphi_j, z_k\}$, ($i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, m$; $k = 0, 1, \dots, l$), $\bar{r}_0 = 1, \dots, \bar{r}_n = H/R$,

$\varphi_0 = 0, \dots, \varphi_m = 2\pi$, $z_0 = 0, \dots, z_l = 1$. Конечный элемент с координатами вершин

$(\bar{r}_i, \varphi_j, z_k)$, $(\bar{r}_{i+1}, \varphi_j, z_k)$, $(\bar{r}_i, \varphi_{j+1}, z_k)$, $(\bar{r}_i, \varphi_j, z_{k+1})$, $(\bar{r}_{i+1}, \varphi_{j+1}, z_k)$, $(\bar{r}_{i+1}, \varphi_j, z_{k+1})$, $(\bar{r}_i, \varphi_{j+1}, z_{k+1})$,

$(\bar{r}_{i+1}, \varphi_{j+1}, z_{k+1})$ представим в виде параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$, $2c$, где $2a = \Delta \bar{r}$, $\Delta \bar{r} = (H/R - 1)/n$, $2b = (\bar{r}_i + a)\Delta\varphi$, $\Delta\varphi = 2\pi/m$, $2c = \Delta z = 1/l$ (рис. 1.37). Здесь $x = \bar{r} - \bar{r}_i$, $y = (\bar{r}_i + a)(\varphi - \varphi_j)$.

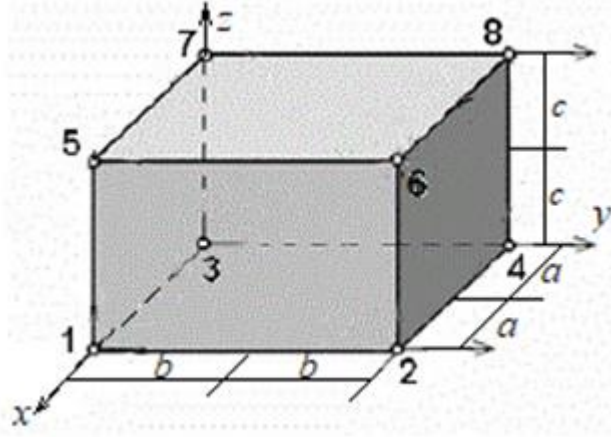


Рис. 1.37

Закон изменения перемещений $\bar{u}_r(x, y, z)$, $\bar{u}_\varphi(x, y, z)$, $\bar{u}_z(x, y, z)$ примем в виде полиномов с суммарным количеством коэффициентов, равным 24, т.е.

$$\begin{aligned}\bar{u}_r(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{16} yz + \alpha_{19} xz + \alpha_{22} xyz \\ \bar{u}_\varphi(x, y, z) &= \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z + \alpha_{14} xy + \alpha_{17} yz + \alpha_{20} xz + \alpha_{23} xyz \\ \bar{u}_z(x, y, z) &= \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z + \alpha_{15} xy + \alpha_{18} yz + \alpha_{21} xz + \alpha_{24} xyz\end{aligned}\quad (1.116)$$

Пусть $\vec{U}_i = \begin{pmatrix} \bar{u}_r^i \\ \bar{u}_\varphi^i \\ \bar{u}_z^i \end{pmatrix}$ - вектор, компоненты которого равны соответствующим

безразмерным перемещениям i -й вершины параллелепипеда

$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. Значения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{24}$ в (1.116)

подберем таким образом, чтобы вектор

$$\begin{aligned}\vec{U}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \bar{u}_r(x, y, z) \\ \bar{u}_\varphi(x, y, z) \\ \bar{u}_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{16} yz + \alpha_{19} xz + \alpha_{22} xyz \\ \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z + \alpha_{14} xy + \alpha_{17} yz + \alpha_{20} xz + \alpha_{23} xyz \\ \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z + \alpha_{15} xy + \alpha_{18} yz + \alpha_{21} xz + \alpha_{24} xyz \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.117)$$

в i -й вершине тетраэдра был равен вектору $\vec{U}_i$. Введем интерполяционные функции $C_i(x, y, z)$, удовлетворяющие уравнению

$$\vec{U}(x, y, z) = \sum_{i=1}^8 C_i(x, y, z) \vec{U}_i \quad (1.118)$$

Из (1.117) и (1.118) следует

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 x + \alpha_7 y + \alpha_{10} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{16} yz + \alpha_{19} xz + \alpha_{22} xyz \\ \alpha_2 + \alpha_5 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} z + \alpha_{14} xy + \alpha_{17} yz + \alpha_{20} xz + \alpha_{23} xyz \\ \alpha_3 + \alpha_6 x + \alpha_9 y + \alpha_{12} z + \alpha_{15} xy + \alpha_{18} yz + \alpha_{21} xz + \alpha_{24} xyz \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 C_i(x, y, z) \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_4 x_i + \alpha_7 y_i + \alpha_{10} z_i + \alpha_{13} x_i y_i + \alpha_{16} y_i z_i + \alpha_{19} x_i z_i + \alpha_{22} x_i y_i z_i \\ \alpha_2 + \alpha_5 x_i + \alpha_8 y_i + \alpha_{11} z_i + \alpha_{14} x_i y_i + \alpha_{17} y_i z_i + \alpha_{20} x_i z_i + \alpha_{23} x_i y_i z_i \\ \alpha_3 + \alpha_6 x_i + \alpha_9 y_i + \alpha_{12} z_i + \alpha_{15} x_i y_i + \alpha_{18} y_i z_i + \alpha_{21} x_i z_i + \alpha_{24} x_i y_i z_i \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

Приравнивая коэффициенты при переменных $\alpha_k, k = 1, \dots, 24$, получаем систему уравнений относительно интерполяционных функций, из которой следует

$$\begin{pmatrix} C_1(x, y, z) \\ C_2(x, y, z) \\ C_3(x, y, z) \\ C_4(x, y, z) \\ C_5(x, y, z) \\ C_6(x, y, z) \\ C_7(x, y, z) \\ C_8(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4 & x_5 y_5 & x_6 y_6 & x_7 y_7 & x_8 y_8 \\ y_1 z_1 & y_2 z_2 & y_3 z_3 & y_4 z_4 & y_5 z_5 & y_6 z_6 & y_7 z_7 & y_8 z_8 \\ x_1 z_1 & x_2 z_2 & x_3 z_3 & x_4 z_4 & x_5 z_5 & x_6 z_6 & x_7 z_7 & x_8 z_8 \\ x_1 y_1 z_1 & x_2 y_2 z_2 & x_3 y_3 z_3 & x_4 y_4 z_4 & x_5 y_5 z_5 & x_6 y_6 z_6 & x_7 y_7 z_7 & x_8 y_8 z_8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \\ xy \\ yz \\ xz \\ xyz \end{pmatrix} \quad (1.120)$$

Введем местную трехмерную нормализованную систему координат, имеющую для параллелепипеда вид

$$\xi = \frac{x - x_c}{a}, \quad \eta = \frac{y - y_c}{b}, \quad \varsigma = \frac{z - z_c}{c},$$

где x_c, y_c, z_c - координаты центра тяжести параллелепипеда. В новой системе координат выражение (1.120) принимает вид

$$\begin{pmatrix} C_1(\xi, \eta, \varsigma) \\ C_2(\xi, \eta, \varsigma) \\ C_3(\xi, \eta, \varsigma) \\ C_4(\xi, \eta, \varsigma) \\ C_5(\xi, \eta, \varsigma) \\ C_6(\xi, \eta, \varsigma) \\ C_7(\xi, \eta, \varsigma) \\ C_8(\xi, \eta, \varsigma) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \varsigma \\ \xi\eta \\ \eta\varsigma \\ \xi\varsigma \\ \xi\eta\varsigma \end{pmatrix} \quad (1.121)$$

Обратная матрица в (1.121) равна

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \varsigma_1 & \xi_1\eta_1 & \eta_1\varsigma_1 & \xi_1\varsigma_1 & \xi_1\eta_1\varsigma_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \varsigma_2 & \xi_2\eta_2 & \eta_2\varsigma_2 & \xi_2\varsigma_2 & \xi_2\eta_2\varsigma_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \varsigma_3 & \xi_3\eta_3 & \eta_3\varsigma_3 & \xi_3\varsigma_3 & \xi_3\eta_3\varsigma_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \varsigma_4 & \xi_4\eta_4 & \eta_4\varsigma_4 & \xi_4\varsigma_4 & \xi_4\eta_4\varsigma_4 \\ 1 & \xi_5 & \eta_5 & \varsigma_5 & \xi_5\eta_5 & \eta_5\varsigma_5 & \xi_5\varsigma_5 & \xi_5\eta_5\varsigma_5 \\ 1 & \xi_6 & \eta_6 & \varsigma_6 & \xi_6\eta_6 & \eta_6\varsigma_6 & \xi_6\varsigma_6 & \xi_6\eta_6\varsigma_6 \\ 1 & \xi_7 & \eta_7 & \varsigma_7 & \xi_7\eta_7 & \eta_7\varsigma_7 & \xi_7\varsigma_7 & \xi_7\eta_7\varsigma_7 \\ 1 & \xi_8 & \eta_8 & \varsigma_8 & \xi_8\eta_8 & \eta_8\varsigma_8 & \xi_8\varsigma_8 & \xi_8\eta_8\varsigma_8 \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

Из (1.121) и (1.122) следует

$$C_k(\xi, \eta, \varsigma) = \frac{1}{8} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma), \quad k = 1, 2, \dots, 8. \quad (1.123)$$

При перемещениях (1.117) тензора деформаций и напряжений можно определить по формулам

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{rr} \\ \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \\ \bar{\varepsilon}_{zz} \\ \bar{\gamma}_{r\varphi} \\ \bar{\gamma}_{\varphi z} \\ \bar{\gamma}_{rz} \end{pmatrix} = [\bar{\Phi}] \begin{pmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_\varphi \\ \bar{u}_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{rr} \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\tau}_{r\varphi} \\ \bar{\tau}_{\varphi z} \\ \bar{\tau}_{rz} \end{pmatrix} = [\bar{D}] \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{rr} \\ \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \\ \bar{\varepsilon}_{zz} \\ \bar{\gamma}_{r\varphi} \\ \bar{\gamma}_{\varphi z} \\ \bar{\gamma}_{rz} \end{pmatrix} \quad (1.124)$$

$$\text{где } \bar{\varepsilon}_{rr} = \frac{R}{\Delta} \varepsilon_{rr}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{R}{\Delta} \varepsilon_{\varphi\varphi}, \bar{\varepsilon}_{zz} = \frac{R}{\Delta} \varepsilon_{zz}, \bar{\gamma}_{r\varphi} = \frac{R}{\Delta} \gamma_{r\varphi}, \bar{\gamma}_{rz} = \frac{R}{\Delta} \gamma_{rz}, \bar{\gamma}_{\varphi z} = \frac{R}{\Delta} \gamma_{\varphi z},$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{R}{\Delta} \frac{\sigma_{rr}}{E}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{R}{\Delta} \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{E}, \bar{\sigma}_{zz} = \frac{R}{\Delta} \frac{\sigma_{zz}}{E}, \bar{\tau}_{r\varphi} = \frac{R}{\Delta} \frac{\tau_{r\varphi}}{E}, \bar{\tau}_{rz} = \frac{R}{\Delta} \frac{\tau_{rz}}{E}, \bar{\tau}_{\varphi z} = \frac{R}{\Delta} \frac{\tau_{\varphi z}}{E},$$

$$[\bar{\Phi}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\bar{r}} & \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} & \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{R}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} & 0 & \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \end{bmatrix}, \quad [\bar{D}] = \begin{bmatrix} 2\bar{\mu} + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & 2\bar{\mu} + \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} & 2\bar{\mu} + \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} \end{bmatrix}, \quad (1.125)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2(1+\nu)}, \quad E, \nu - \text{модуль упругости и коэффициент}$$

Пуассона подшипника.

Подставив (1.123) в (1.118), а полученное выражение в (1.122), найдем выражение для деформаций среды в рассматриваемом параллелепипеде в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_{rr} \\ \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \\ \bar{\varepsilon}_{zz} \\ \bar{\gamma}_{r\varphi} \\ \bar{\gamma}_{\varphi z} \\ \bar{\gamma}_{rz} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^8 [B]^{(k)} \vec{U}_k, \text{ где} \quad (1.126)$$

$$[B]^{(k)} = [\bar{\Phi}] C_k = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) & 0 & 0 \\ \frac{C_k}{\bar{r}} & \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_k \xi) (1 + \varsigma_k \varsigma) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R}{L} \frac{\varsigma_k}{c} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) \\ \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_k \xi) (1 + \varsigma_k \varsigma) & \frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) - \frac{C_k}{\bar{r}} & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \frac{\varsigma_k}{c} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) & \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_k \xi) (1 + \varsigma_k \varsigma) \\ \frac{R}{L} \frac{\varsigma_k}{c} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) & 0 & \frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) \end{bmatrix}$$

Выражение (1.126) определяет деформации тетраэдра через перемещения его вершин. Из (1.126) и (1.124) следуют выражения для напряжений в рассматриваемом тетраэдре

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{rr} \\ \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\tau}_{r\varphi} \\ \bar{\tau}_{\varphi z} \\ \bar{\tau}_{rz} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^4 [\bar{D}] [B]^{(k)} \vec{U}_k \quad (1.127)$$

Выражение (1.127) определяет напряжения в рассматриваемом конечном элементе через перемещения его вершин.

Пронумеруем все конечные элементы. Пусть I - номер рассматриваемого элемента ($I=1,2,...,nml$). Рассматриваем случай, когда внешние силы не действуют в рассматриваемом элементе объема среды. Тогда напряженное состояние элемента определяется только усилиями взаимодействия со смежными элементами, которые будем считать внешними. Заменим

реальные усилия, действующие вдоль границ стыковки рассматриваемого элемента со смежными элементами, на статически эквивалентные узловые силы, т.е. силы, действие которых вызывает внутри элемента напряженно-деформированное состояние, аналогичное тому, какое есть в нем при фактической нагрузке. Эти силы определяются деформированным состоянием (1.124) и напряженным состоянием (1.126) и оказываются равными [32]

$$\vec{F}_I^{(j)} = \begin{pmatrix} F_{I,r}^{(j)} \\ F_{I,\varphi}^{(j)} \\ F_{I,z}^{(j)} \end{pmatrix} = \Delta L E \vec{\bar{F}}_I^{(j)}, \quad \vec{\bar{F}}_I^{(j)} = \iiint_V \sum_{k=1}^8 \left\{ [B]^{(j)} \right\}^T [\bar{D}] [B]^{(k)} \vec{U}_k dx dy d\bar{z} \quad (1.128)$$

где интегрирование производится по объему параллелепипеда в

безразмерных переменных. Выражение $\iiint_V \left\{ [B]^{(j)} \right\}^T [\bar{D}] [B]^{(k)} dx dy d\bar{z}$ в

(1.128) определяет реактивные усилия в j узле, отвечающие единичным перемещениям в k узле.

Вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} \left\{ [B]^{(j)} \right\}^T [\bar{D}] [B]^{(k)} &= \frac{1}{64} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \\ A_{11} &= \frac{\xi_j}{a} (1 + \eta_j \eta) (1 + \varsigma_j \varsigma) \left[(2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) + \frac{\bar{\lambda}}{8\bar{r}} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) \right] + \\ &+ \frac{1}{8\bar{r}} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) (1 + \varsigma_j \varsigma) \left[\bar{\lambda} \frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) + \frac{1}{8\bar{r}} (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) \right] + \\ &+ \bar{\mu} \left(\frac{\eta_k}{b} \right) \left(\frac{\eta_j}{b} \right) (1 + \xi_k \xi) (1 + \varsigma_k \varsigma) (1 + \xi_j \xi) (1 + \varsigma_j \varsigma) + \\ &+ \bar{\mu} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \left(\frac{\varsigma_k}{c} \right) \left(\frac{\varsigma_j}{c} \right) (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta), \\ A_{12} &= \bar{\lambda} \frac{\xi_j}{a} \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_k \xi) (1 + \varsigma_k \varsigma) (1 + \eta_j \eta) (1 + \varsigma_j \varsigma) + \\ &+ \frac{(2\bar{\mu} + \bar{\lambda})}{8\bar{r}} \frac{\eta_k}{b} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) (1 + \varsigma_j \varsigma) (1 + \xi_k \xi) (1 + \varsigma_k \varsigma) + \\ &+ \bar{\mu} \frac{\eta_j}{b} (1 + \xi_j \xi) (1 + \varsigma_j \varsigma) \left[\frac{\xi_k}{a} (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) - \frac{1}{8\bar{r}} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) (1 + \varsigma_k \varsigma) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \bar{\lambda} \frac{R}{L} \frac{\varsigma_k}{c} \frac{\xi_j}{a} (1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma)(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta) + \\
&\bar{\lambda} \frac{1}{8\bar{r}} \frac{R}{L} \frac{\varsigma_k}{c} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma)(1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta) + \\
&+\bar{\mu} \frac{R}{L} \frac{\varsigma_j}{c} \frac{\xi_k}{a} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta)(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma), \\
A_{21} &= \frac{\eta_j}{b} (1+\xi_j\xi)(1+\varsigma_j\varsigma) \left[\bar{\lambda} \frac{\xi_k}{a} (1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma) + (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{1}{8\bar{r}} (1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma) \right] + \\
&+\bar{\mu} \left[\frac{\xi_j}{a} (1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma) - \frac{1}{8\bar{r}} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma) \right] \frac{\eta_k}{b} (1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma), \\
A_{22} &= (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\eta_k}{b} \frac{\eta_j}{b} (1+\xi_j\xi)(1+\varsigma_j\varsigma)(1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma) + \\
&+\bar{\mu} \left[\frac{\xi_j}{a} (1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma) - \frac{1}{8\bar{r}} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma) \right] \times \\
&\times \left[\frac{\xi_k}{a} (1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma) - \frac{1}{8\bar{r}} (1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma) \right] + \\
&+\bar{\mu} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\varsigma_j}{c} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta) \frac{\varsigma_k}{c} (1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta), \\
A_{23} &= \bar{\lambda} \frac{R}{L} \frac{\eta_j}{b} (1+\xi_j\xi)(1+\varsigma_j\varsigma) \frac{\varsigma_k}{c} (1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta) + \\
&+\bar{\mu} \frac{R}{L} \frac{\varsigma_j}{c} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta) \frac{\eta_k}{b} (1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma), \\
A_{31} &= \bar{\lambda} \frac{R}{L} \frac{\varsigma_j}{c} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta) \frac{\xi_k}{a} (1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma) + \\
&+\bar{\mu} \frac{R}{L} \frac{\xi_j}{a} (1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma) \frac{\varsigma_k}{c} (1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta), \\
A_{32} &= \bar{\lambda} \frac{R}{L} \frac{\varsigma_j}{c} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta) \frac{\eta_k}{b} (1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma) + \\
&+\bar{\mu} \frac{R}{L} \frac{\eta_j}{b} (1+\xi_j\xi)(1+\varsigma_j\varsigma) \frac{\varsigma_k}{c} (1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta), \\
A_{33} &= (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\varsigma_j}{c} (1+\xi_j\xi)(1+\eta_j\eta) \frac{\varsigma_k}{c} (1+\xi_k\xi)(1+\eta_k\eta) + \\
&+\bar{\mu} \frac{\eta_j}{b} (1+\xi_j\xi)(1+\varsigma_j\varsigma) \frac{\eta_k}{b} (1+\xi_k\xi)(1+\varsigma_k\varsigma) + \\
&+\bar{\mu} \frac{\xi_j}{a} (1+\eta_j\eta)(1+\varsigma_j\varsigma) \frac{\xi_k}{a} (1+\eta_k\eta)(1+\varsigma_k\varsigma).
\end{aligned}$$

После перехода к переменным ξ, η, ς в интеграле (1.128), получаем

$$\iiint_V \left\{ [B]^{(j)} \right\}^T [\bar{D}] [B]^{(k)} dx dy dz = abc \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 d\eta \int_{-1}^1 \left\{ [B]^{(j)} \right\}^T [\bar{D}] [B]^{(k)} d\varsigma$$

Интегрируя, получаем

$$\bar{\bar{F}}_I^{(j)} = \sum_{k=1}^8 K_I^{(j,k)} \bar{U}_k, \quad K_I^{(j,k)} = \begin{bmatrix} K_{I,11}^{j,k} & K_{I,12}^{j,k} & K_{I,13}^{j,k} \\ K_{I,21}^{j,k} & K_{I,22}^{j,k} & K_{I,23}^{j,k} \\ K_{I,31}^{j,k} & K_{I,32}^{j,k} & K_{I,33}^{j,k} \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

где I - номер конечного элемента, $I = 1, 2, \dots, nml$,

$$K_{I,11}^{j,k} = \frac{abc}{72} \left[(2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\xi_j \xi_k}{a^2} (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) + \bar{\mu} \frac{\eta_j \eta_k}{b^2} (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) + \right. \\ \left. + \bar{\mu} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\varsigma_j \varsigma_k}{c^2} (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k) \right] + \frac{abc}{576 \bar{r}_I} \left[\bar{\lambda} (\xi_j + \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) + \right. \\ \left. + \frac{(2\bar{\mu} + \bar{\lambda})}{24 \bar{r}_I} (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) \right],$$

$$K_{I,12}^{j,k} = \frac{c}{24} (3 + \varsigma_j \varsigma_k) (\bar{\lambda} \xi_j \eta_k + \bar{\mu} \xi_k \eta_j) + \frac{ac}{576 \bar{r}_I} [(2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \eta_k - \bar{\mu} \eta_j] (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k),$$

$$K_{I,13}^{j,k} = \frac{R}{L} \frac{b}{24} (\bar{\lambda} \xi_j \varsigma_k + \bar{\mu} \xi_k \varsigma_j) (3 + \eta_j \eta_k) + \frac{R}{L} \frac{ab}{576 \bar{r}_I} \varsigma_k (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \xi_j \xi_k),$$

$$K_{I,21}^{j,k} = \frac{c}{24} (\bar{\lambda} \xi_k \eta_j + \bar{\mu} \xi_j \eta_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) + \frac{ac}{576 \bar{r}_I} [(2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \eta_j - \bar{\mu} \eta_k] (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k),$$

$$K_{I,22}^{j,k} = \frac{ac}{72b} (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \eta_j \eta_k (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) + \\ + \bar{\mu} \frac{bc}{576} \left(\frac{8\xi_j \xi_k}{a} - \frac{\xi_j + \xi_k}{\bar{r}_I} \right) (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) + \\ + \bar{\mu} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{ab}{72c} \varsigma_j \varsigma_k (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k) + \bar{\mu} \frac{abc}{13824 \bar{r}_I^2} (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k),$$

$$K_{I,23}^{j,k} = \frac{a}{24} \left(\frac{R}{L} \right) (\bar{\lambda} \eta_j \varsigma_k + \bar{\mu} \eta_k \varsigma_j) (3 + \xi_j \xi_k), \quad K_{I,31}^{j,k} = \frac{b}{24} \left(\frac{R}{L} \right) (\bar{\lambda} \xi_k \varsigma_j + \bar{\mu} \xi_j \varsigma_k) (3 + \eta_j \eta_k),$$

$$K_{I,32}^{j,k} = \frac{a}{24} \left(\frac{R}{L} \right) (\bar{\lambda} \eta_k \varsigma_j + \bar{\mu} \eta_j \varsigma_k) (3 + \xi_j \xi_k),$$

$$K_{I,33}^{j,k} = \frac{abc}{72} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^2 (2\bar{\mu} + \bar{\lambda}) \frac{\varsigma_j \varsigma_k}{c^2} (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \eta_j \eta_k) + \bar{\mu} \frac{\eta_j \eta_k}{b^2} (3 + \xi_j \xi_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) + \right. \\ \left. + \bar{\mu} \frac{\xi_j \xi_k}{a^2} (3 + \eta_j \eta_k) (3 + \varsigma_j \varsigma_k) \right],$$

$\bar{r}_I$ - центр тяжести I конечного элемента.

Формула (1.129) определяет усилия в j узле I конечного элемента, отвечающие единичным перемещениям в k узле. Матрицу $K_I^{(j,k)}$ называют матрицей жесткости I конечного элемента. Зная матрицы жесткости всех элементов системы можно построить матрицу жесткости всей системы.

Пронумеруем все узлы трехмерной сетки. Количество узлов равно $N = (n+1)(m+1)(l+1)$.

Матрица жесткости $\bar{K}$ системы имеет размерность $[3N \times 3N]$ и определяет реактивные усилия в N узлах при заданных перемещениях в них. Т.е.

$$\bar{Q} = \bar{K}_w \quad (1.130)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= [\bar{u}_r^{(1)}, \bar{u}_\varphi^{(1)}, \bar{u}_z^{(1)}, \bar{u}_r^{(2)}, \bar{u}_\varphi^{(2)}, \bar{u}_z^{(2)}, \dots, \bar{u}_r^{(N)}, \bar{u}_\varphi^{(N)}, \bar{u}_z^{(N)}]^T = [\bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{u}^{(N)}]^T, \quad \bar{u}^{(i)} = [\bar{u}_r^{(i)}, \bar{u}_\varphi^{(i)}, \bar{u}_z^{(i)}]^T, \\ \bar{\mathbf{Q}} &= [\bar{p}_r^{(1)}, \bar{p}_\varphi^{(1)}, \bar{p}_z^{(1)}, \bar{p}_r^{(2)}, \bar{p}_\varphi^{(2)}, \bar{p}_z^{(2)}, \dots, \bar{p}_r^{(N)}, \bar{p}_\varphi^{(N)}, \bar{p}_z^{(N)}]^T = [\bar{p}^{(1)}, \dots, \bar{p}^{(N)}]^T, \quad \bar{p}^{(i)} = [\bar{p}_r^{(i)}, \bar{p}_\varphi^{(i)}, \bar{p}_z^{(i)}]^T. \end{aligned}$$

Матрица $\bar{K}$ имеет блочную структуру, т.е.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1,1}, \bar{K}_{1,2}, ..., \bar{K}_{1,N} \\ \bar{K}_{2,1}, \bar{K}_{2,2}, ..., \bar{K}_{2,N} \\ \\ \bar{K}_{N,1}, \bar{K}_{N,2}, ..., \bar{K}_{N,N} \end{bmatrix} \quad (1.131)$$

где матрица $\bar{K}_{I,J}$ определяет реактивные усилия в I узле при перемещениях в J узле, т.е.

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_r^{(I)} \\ \bar{p}_\varphi^{(I)} \\ \bar{p}_z^{(I)} \end{bmatrix} = \bar{K}_{I,J} \begin{bmatrix} \bar{u}_r^{(J)} \\ \bar{u}_\varphi^{(J)} \\ \bar{u}_z^{(J)} \end{bmatrix}, \text{ или } \bar{p}^{(I)} = \bar{K}_{I,J} \bar{u}^{(J)} \quad (1.132)$$

Матрица $\bar{K}_{I,J}$ можно получить путем суммирования матриц $K_L^{(j,k)}$, определенных в (1.129). Это можно сделать следующим образом.

На рис. 1.38 изображен узел с номером J и конечные элементы с номерами $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8$.

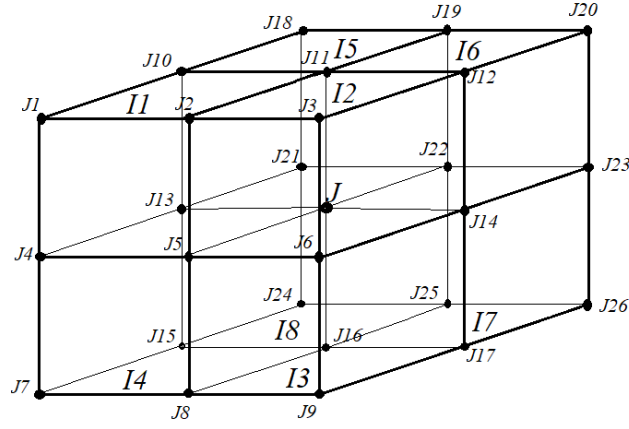


Рис. 1.38

Из определения $K_L^{(j,k)}$ следуют соотношения:

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_{J,J} &= K_{I1}^{(4,4)} + K_{I2}^{(3,3)} + K_{I3}^{(7,7)} + K_{I4}^{(8,8)} + K_{I5}^{(2,2)} + K_{I6}^{(1,1)} + K_{I7}^{(5,5)} + K_{I8}^{(6,6)}, \\
 \bar{K}_{J,J1} &= K_{I1}^{(4,5)}, \bar{K}_{J,J3} = K_{I2}^{(3,6)}, \bar{K}_{J,J7} = K_{I4}^{(8,1)}, \bar{K}_{J,J9} = K_{I3}^{(7,2)}, \bar{K}_{J,J18} = K_{I5}^{(2,7)}, \\
 \bar{K}_{J,J20} &= K_{I6}^{(1,8)}, \bar{K}_{J,J24} = K_{I8}^{(6,3)}, \bar{K}_{J,J26} = K_{I7}^{(5,4)}, \bar{K}_{J,J2} = K_{I1}^{(4,6)} + K_{I2}^{(3,5)}, \\
 \bar{K}_{J,J6} &= K_{I2}^{(3,2)} + K_{I3}^{(7,6)}, \bar{K}_{J,J8} = K_{I3}^{(7,6)} + K_{I4}^{(8,5)}, \bar{K}_{J,J4} = K_{I1}^{(4,1)} + K_{I4}^{(8,5)}, \bar{K}_{J,J19} = K_{I5}^{(2,8)} + K_{I6}^{(1,7)}, \\
 \bar{K}_{J,J23} &= K_{I6}^{(1,4)} + K_{I7}^{(5,8)}, \bar{K}_{J,J25} = K_{I7}^{(5,3)} + K_{I8}^{(6,4)}, \bar{K}_{J,J21} = K_{I5}^{(2,3)} + K_{I8}^{(6,7)}, \\
 \bar{K}_{J,J10} &= K_{I1}^{(4,7)} + K_{I5}^{(2,5)}, \bar{K}_{J,J12} = K_{I2}^{(3,8)} + K_{I6}^{(1,6)}, \bar{K}_{J,J17} = K_{I3}^{(7,4)} + K_{I7}^{(5,2)}, \\
 \bar{K}_{J,J15} &= K_{I4}^{(8,3)} + K_{I8}^{(6,1)}, \bar{K}_{J,J5} = K_{I1}^{(4,2)} + K_{I2}^{(3,1)} + K_{I3}^{(7,5)} + K_{I4}^{(8,6)}, \\
 \bar{K}_{J,J22} &= K_{I5}^{(2,4)} + K_{I6}^{(1,3)} + K_{I7}^{(5,7)} + K_{I8}^{(6,8)}, \bar{K}_{J,J11} = K_{I1}^{(4,6)} + K_{I2}^{(3,5)} + K_{I5}^{(2,8)} + K_{I6}^{(1,7)}, \\
 \bar{K}_{J,J13} &= K_{I1}^{(4,3)} + K_{I4}^{(8,7)} + K_{I5}^{(2,1)} + K_{I8}^{(6,5)}, \bar{K}_{J,J14} = K_{I2}^{(3,4)} + K_{I6}^{(1,2)} + K_{I3}^{(7,8)} + K_{I7}^{(5,6)}, \\
 \bar{K}_{J,J16} &= K_{I3}^{(7,3)} + K_{I4}^{(8,4)} + K_{I7}^{(5,1)} + K_{I8}^{(6,2)}.
 \end{aligned} \tag{1.133}$$

По формулам (1.133) вычисляем элементы матрицы $\bar{K}$ в (1.130).

Вычислив обратную матрицу $\bar{K}^{-1}$, найдем

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_N \end{bmatrix} = \bar{K}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_N \end{bmatrix} \tag{1.134}$$

Во внутренних узлах сетки и в узлах, расположенных на свободных поверхностях, реактивные усилия равны нулю, т.е.

$$\bar{p}_I = 0, \quad I = i_1, i_2, \dots, i_{N1} \quad (1.135)$$

$N1$ - общее количество внутренних узлов и узлов, расположенных на свободных поверхностях.

В узлах сетки, расположенных на внутренней поверхности цилиндра в области гидродинамического контакта реактивные усилия равны [32]

$$\bar{p}_J = \frac{R}{\Delta} \frac{p_J}{E} \Delta z \Delta \varphi = \frac{\Delta z \Delta \varphi}{8(1-\nu^2)} q_J, \quad J = j_1, j_2, \dots, j_{N2} \quad (1.136)$$

$N2$ - количество узлов сетки, расположенных на внутренней поверхности цилиндра в области гидродинамического контакта, p_J - гидродинамическое

давление, $\Delta z, \Delta \varphi$ - шаги сетки по осям z и φ соответственно, $q_J = \frac{8(1-\nu^2)R}{\Delta} \frac{p_J}{E}$

- безразмерное гидродинамическое давление, определенное в плоской задаче.

В узлах сетки, расположенных на жестко закрепленной поверхности цилиндра, равны нулю упругие перемещения, т.е.

$$w_K = 0, \quad K = k_1, \dots, k_{N3}, \quad (1.137)$$

$N3$ - количество узлов сетки, расположенных на поверхности $\bar{r} = 1 + H/R$.

Система уравнений (1.134) – (1.137) однозначно определяет значения w_L и $\bar{p}_L$ во всех узлах трехмерной сетки при заданных гидродинамических давлениях p_J в узлах $J = j_1, j_2, \dots, j_{N2}$.

Эту систему уравнений, учитывая (1.135), преобразуем к трем системам уравнений

$$\begin{bmatrix} w_{j_1} \\ w_{j_2} \\ \vdots \\ w_{j_{N2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{j_1, j_1} & K_{j_1, j_2}, \dots, K_{j_1, j_{N2}} \\ K_{j_2, j_1} & K_{j_2, j_2}, \dots, K_{j_2, j_{N2}} \\ \vdots & \vdots \\ K_{j_{N2}, j_1} & K_{j_{N2}, j_2}, \dots, K_{j_{N2}, j_{N2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{j_1} \\ \bar{p}_{j_2} \\ \vdots \\ \bar{p}_{j_{N2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{j_1, k_1} & K_{j_1, k_2}, \dots, K_{j_1, k_{N3}} \\ K_{j_2, k_1} & K_{j_2, k_2}, \dots, K_{j_2, k_{N3}} \\ \vdots & \vdots \\ K_{j_{N2}, k_1} & K_{j_{N2}, k_2}, \dots, K_{j_{N2}, k_{N3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{k_1} \\ \bar{p}_{k_2} \\ \vdots \\ \bar{p}_{k_{N3}} \end{bmatrix}, \quad (1.138)$$

$$\begin{bmatrix} w_{k_1} \\ w_{k_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{k_{N_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{k_1, j_1} & K_{k_1, j_2}, \dots, K_{k_1, j_{N_2}} \\ K_{k_2, j_1} & K_{k_2, j_2}, \dots, K_{k_2, j_{N_2}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K_{k_{N_3}, j_1} & K_{k_{N_3}, j_2}, \dots, K_{k_{N_3}, j_{N_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{j_1} \\ \bar{p}_{j_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_{j_{N_2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{k_1, k_1} & K_{k_1, k_2}, \dots, K_{k_1, k_{N_3}} \\ K_{k_2, k_1} & K_{k_2, k_2}, \dots, K_{k_2, k_{N_3}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K_{k_{N_3}, k_1} & K_{k_{N_3}, k_2}, \dots, K_{k_{N_3}, k_{N_3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{k_1} \\ \bar{p}_{k_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_{k_{N_3}} \end{bmatrix}, \quad (1.139)$$

$$\begin{bmatrix} w_{i_1} \\ w_{i_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{i_{N_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{i_1, j_1} & K_{i_1, j_2}, \dots, K_{i_1, j_{N_2}} \\ K_{i_2, j_1} & K_{i_2, j_2}, \dots, K_{i_2, j_{N_2}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K_{i_{N_1}, j_1} & K_{i_{N_1}, j_2}, \dots, K_{i_{N_1}, j_{N_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{j_1} \\ \bar{p}_{j_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_{j_{N_2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{i_1, k_1} & K_{i_1, k_2}, \dots, K_{i_1, k_{N_3}} \\ K_{i_2, k_1} & K_{i_2, k_2}, \dots, K_{i_2, k_{N_3}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K_{i_{N_1}, k_1} & K_{i_{N_1}, k_2}, \dots, K_{i_{N_1}, k_{N_3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{k_1} \\ \bar{p}_{k_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_{k_{N_3}} \end{bmatrix}. \quad (1.140)$$

Из (1.139) следует

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_{k_1} \\ \bar{p}_{k_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_{k_{N_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{k_1, k_1} & K_{k_1, k_2}, \dots, K_{k_1, k_{N_3}} \\ K_{k_2, k_1} & K_{k_2, k_2}, \dots, K_{k_2, k_{N_3}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K_{k_{N_3}, k_1} & K_{k_{N_3}, k_2}, \dots, K_{k_{N_3}, k_{N_3}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{k_1, j_1} & K_{k_1, j_2}, \dots, K_{k_1, j_{N_2}} \\ K_{k_2, j_1} & K_{k_2, j_2}, \dots, K_{k_2, j_{N_2}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K_{k_{N_3}, j_1} & K_{k_{N_3}, j_2}, \dots, K_{k_{N_3}, j_{N_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{j_1} \\ \bar{p}_{j_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_{j_{N_2}} \end{bmatrix} \quad (1.141)$$

Подставляя (1.141) в (1.138), получаем

$$\begin{bmatrix} w_{j_1} \\ w_{j_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{j_{N_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{j_1, j_1} & B_{j_1, j_2}, \dots, B_{j_1, j_{N_2}} \\ B_{j_2, j_1} & B_{j_2, j_2}, \dots, B_{j_2, j_{N_2}} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ B_{j_{N_2}, j_1} & B_{j_{N_2}, j_2}, \dots, B_{j_{N_2}, j_{N_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}_{j_1} \\ \bar{p}_{j_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{p}_{j_{N_2}} \end{bmatrix}, \quad (1.142)$$

$$\begin{bmatrix} B_{j_1, j_1} & B_{j_1, j_2}, \dots, B_{j_1, j_{N2}} \\ B_{j_2, j_1} & B_{j_2, j_2}, \dots, B_{j_2, j_{N2}} \\ \dots & \dots \\ B_{j_{N2}, j_1} & B_{j_{N2}, j_2}, \dots, B_{j_{N2}, j_{N2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{j_1, j_1} & K_{j_1, j_2}, \dots, K_{j_1, j_{N2}} \\ K_{j_2, j_1} & K_{j_2, j_2}, \dots, K_{j_2, j_{N2}} \\ \dots & \dots \\ K_{j_{N2}, j_1} & K_{j_{N2}, j_2}, \dots, K_{j_{N2}, j_{N2}} \end{bmatrix} + \\
+ \begin{bmatrix} K_{j_1, k_1} & K_{j_1, k_2}, \dots, K_{j_1, k_{N3}} \\ K_{j_2, k_1} & K_{j_2, k_2}, \dots, K_{j_2, k_{N3}} \\ \dots & \dots \\ K_{j_{N2}, k_1} & K_{j_{N2}, k_2}, \dots, K_{j_{N2}, k_{N3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{k_1, k_1} & K_{k_1, k_2}, \dots, K_{k_1, k_{N3}} \\ K_{k_2, k_1} & K_{k_2, k_2}, \dots, K_{k_2, k_{N3}} \\ \dots & \dots \\ K_{k_{N3}, k_1} & K_{k_{N3}, k_2}, \dots, K_{k_{N3}, k_{N3}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{k_1, j_1} & K_{k_1, j_2}, \dots, K_{k_1, j_{N2}} \\ K_{k_2, j_1} & K_{k_2, j_2}, \dots, K_{k_2, j_{N2}} \\ \dots & \dots \\ K_{k_{N3}, j_1} & K_{k_{N3}, j_2}, \dots, K_{k_{N3}, j_{N2}} \end{bmatrix}$$

Если гидродинамические давления в смазочном слое известны, то по формулам (1.141) можно определить реактивные усилия в узлах сетки, расположенных на жестко закрепленной поверхности цилиндра, а по формулам (1.142) - перемещения узлов сетки, расположенных в области действия гидродинамического давления.

Пусть на плоскости $O\varphi z$ в области действия гидродинамических давлений введена двумерная сетка $\{\varphi_k, z_j\}$, $k=1, 2, \dots, M$, $\varphi_1 = -\theta$, $\varphi_M = \varphi_c$, $j=1, 2, \dots, L$, $z_1 = 0$, $z_L = 1$ и в узлах сетки определены безразмерные давления $q_{k,j}$. В этом случае по формулам (1.136), (1.142) можно определить упругие радиальные перемещения $w_{i,l} = \bar{u}_r(\varphi_i, z_l)$ в узле (φ_i, z_l) . Зависимость $w_{i,l}$ от $q_{k,j}$ представим в виде

$$w_{i,l} = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^L A_{k,j}^{(i,l)} q_{k,j} \quad (1.143)$$

Коэффициенты $A_{k,j}^{(i,l)}$ определяются по элементам матриц в правой части формулы (1.142).

Матрица в правой части (1.142) является квадратной матрицей размерности $3ML$. Общее количество элементов данной матрицы равно $9M^2L^2$.

При каждом значении i, l матрица $[A_{k,j}^{(i,l)}]$ является прямоугольной матрицей, содержащей M строк и L столбцов, т. е. количество элементов матрицы $A_{k,j}^{(i,l)}$ при фиксированных значениях i, l равно ML . Количество таких матриц при разных значениях i, l также равно ML . Общее количество элементов $A_{k,j}^{(i,l)}$ при разных значениях i, l, k, j равно M^2L^2 . Эти элементы выбираются из матрицы $[B_{j_i,j_k}]$ следующим образом. Индексу j_i в элементе B_{j_i,j_k} соответствует тот же узел двумерной сетки $\{\varphi_k, z_j\}$, что и индексам (i, l) в элементе $A_{k,j}^{(i,l)}$. Индексу j_k в элементе B_{j_i,j_k} соответствует тот же узел двумерной сетки $\{\varphi_k, z_j\}$, что и индексам (k, j) в элементе $A_{k,j}^{(i,l)}$. При этом $A_{k,j}^{(i,l)} = \frac{\Delta z \Delta \varphi}{8(1-\nu^2)} B_{r,j_i,j_k}$.

В безразмерных переменных, определенных в плоской неизотермической задаче и по формуле $z = Z/L$, уравнение Рейнольдса и уравнение энергии для смазочного слоя запишем в виде [84]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{\rho} F_2(\varphi, z) \exp(Gq(\varphi)) H^3 \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} F_2(\varphi, z) \exp(Gq(\varphi)) H^3 \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \\ - \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{\rho} H F_0(\varphi, z)) = 0 \end{aligned} \quad (1.144)$$

$$H^2 \bar{u}_\varphi \frac{\partial t}{\partial \varphi} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 H^2 \bar{u}_z \frac{\partial t}{\partial z} + H \bar{u}_y \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \Lambda \frac{\bar{\mu}}{t_c} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (1.145)$$

Функцию $H(\varphi, z)$ в узле (φ_i, z_j) двумерной сетки определяем по формуле

$$H(\varphi_i, z_j) = 1 - \lambda \cos(\varphi_i - \varphi_\delta) + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^L A_{k,l}^{(i,j)} q_{k,l}, \quad (1.146)$$

Неизотермическую задачу решаем итерациями, состоящими в последовательном решении уравнения Рейнольдса совместно с уравнением контактных деформаций, а затем уравнения энергии совместно с уравнением теплового баланса и дальнейшего определения новых значений функций $F_i(\varphi, z), i=1, 2, 3$. Метод решения энергии совместно с уравнением теплового баланса аналогичен изложенному выше методу решения данной задачи в

плоском случае. Отличие состоит в том, что вместо N_y уравнений относительно N_y неизвестных $t_{i,k}$, $k=1,...,N_y$ методом Ньютона решается система $N_y L$ уравнений относительно $t_{i,k,l}$, $l=1,...,L$ неизвестных.

Рассмотрим метод совместного решения уравнения Рейнольдса при известных функциях $F_i(\varphi, z)$, $i=1,2,3$ и уравнения контактных деформаций.

Используем два вида сеток. Двумерная постоянная сетка $\{\varphi_i, z_j\}$, $i=0,1,...,N_\varphi$; $j=0,1,...,N_z$, $\varphi_0=-\theta$, $\varphi_{N_\varphi}=\theta$, $z_0=0$, $z_{N_z}=1$. При известных гидродинамических давлениях в узлах данной сетки радиальные перемещения поверхности подшипника определяются по описанной выше методике. Вторая сетка изменяется на каждой итерации.

По оси z разбиение отрезка $[0;1]$ такое же, как и в первой сетке. Выходная граница смазочного слоя является функцией переменной z , т.е. $\varphi_c = \varphi_c(z)$. Пусть $\varphi_{c,j} = \varphi_c(z_j)$. При каждом $j=0,1,...,N_z$ на отрезке $[z=z_j, \varphi \in [-\theta, \varphi_{c,j}]]$ вводим равномерную сетку с количеством узлов $N_z + 1$. В результате получаем вторую сетку, на которой решаем уравнение Рейнольдса (1.144) при соответствующих граничных условиях. Вычисление радиальных перемещений в узлах второй сетки производим после их вычислений в узлах первой сетки интерполяциями. Аналогичное гидродинамическое давление в узлах первой сетки вычисляем по значениям давления в узлах второй сетки интерполяциями.

Принимая в уравнении 1.144 $z=z_j$ и интегрируя по переменной φ от φ до $\varphi_{c,j}$, получаем

$$\bar{\rho} F_2(\varphi, z_j) H^3 \exp(-Gq) \frac{dq}{d\varphi} + E(\varphi, z_j) = \alpha (\bar{\rho} H F_0(\varphi, z_j) - H_0), \quad (1.147)$$

$$E(\varphi, z_j) = \left(\frac{R}{L}\right)^2 \int_{\varphi}^{\varphi_{c,j}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} F_2(\xi, z_j) \exp(Gq(\xi)) H^3 \frac{\partial q}{\partial z} \right)_{z=z_j} d\xi, \quad \varphi_{c,j} = \varphi_c(z_j).$$

Решается система уравнений относительно неизвестных φ_{c_j} , $j=1, \dots, N_z-1$, $E_{i,j} = E(\varphi_i, z_j)$, $i=0, 1, \dots, N_\varphi$; $j=0, 1, \dots, N_z$ и $q_{i,j} = q(\varphi_i, z_j)$, $i=1, \dots, N_\varphi-1$; $j=1, \dots, N_z-1$ в узлах второй сетки. Значения переменных на следующей итерации определяются по значениям на предыдущей итерации следующим образом. Решаем N_z-1 раз уравнение (1.147) совместно с уравнением контактных деформаций при значениях $z = z_j$, $j=1, 2, \dots, N_z-1$. При известных на предыдущей итерации значениях $E_{i,j} = E(\varphi_i, z_j)$ метод решения тот же самый, что и в плоском случае. После выполнения данной процедуры получаем новые значения переменных $q_{i,j}$ и $H_{i,j}$, после чего вычисляем значения $E_{i,j}$. Функциями, зависящими от неизвестных, являются разности между новыми и старыми значениями $q_{i,j}$ и $H_{i,j}$, а также условия $q_{0,j} = 0$, $j=1, 2, \dots, N_z-1$.

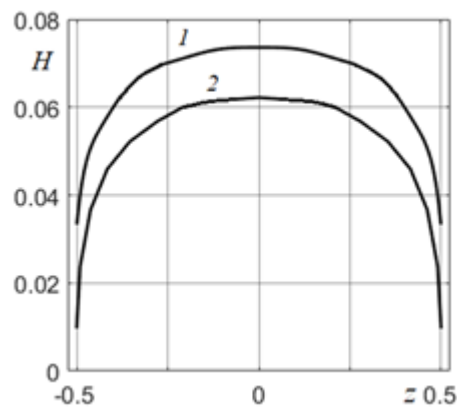


Рис. 1.39

На рис. 1.39 приведены зависимости $H(z)$ в изотермическом случае при значении угловой координаты, при которой толщина смазочного слоя принимает минимальное значение. Расчеты проводились в изотермической постановке при значениях безразмерных параметров: $\alpha = 0.12$, $B = 7$ (кривая 1) и $\alpha = 0.1$, $B = 12$ (кривая 2). Приведенные результаты демонстрируют, что толщина смазочного слоя в торцах подшипника может быть значительно ниже толщины смазочного слоя в среднем сечении. Толщина смазочного слоя в торцах подшипника, а также максимальная температура смазочного слоя определяют предельную несущую способность подшипника. Их точное

определение при проектировании является необходимым условием успешной работы подшипника в процессе эксплуатации.

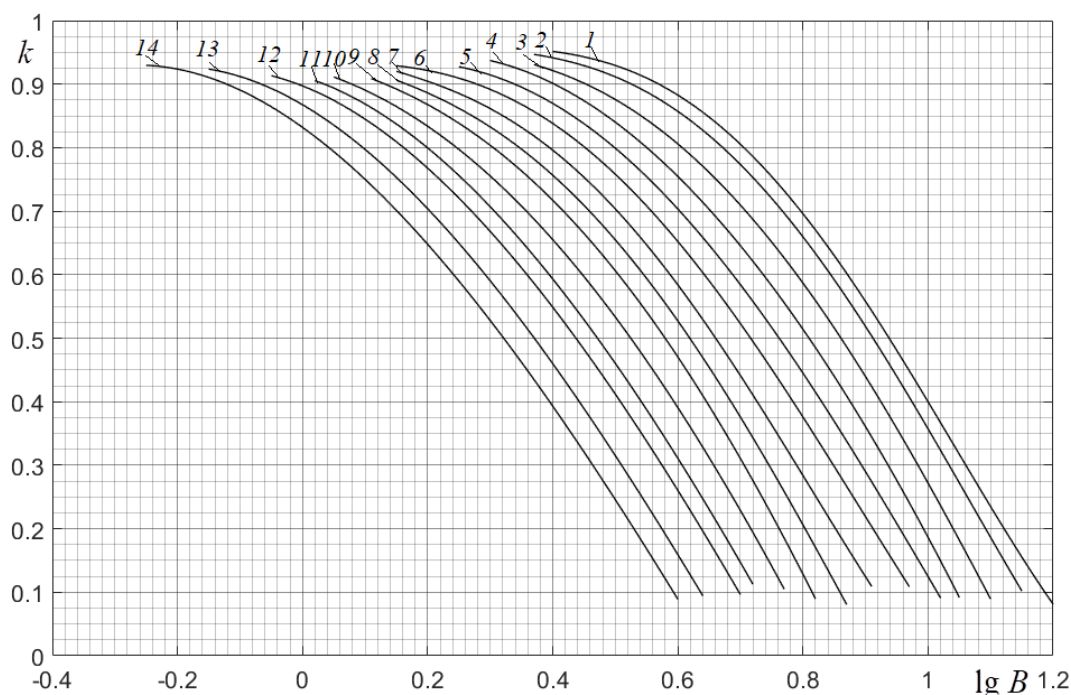


Рис. 1.40

Путем обработки большого количества численных расчетов получены кривые зависимостей $k = H_{\min}^t / H_{\min}$ от коэффициента нагруженности B при разных значениях коэффициента податливости α (рис. 1.40). Здесь $H_{\min}^t$ - минимальная по угловой координате толщина смазочного слоя в торцах подшипника, $H_{\min}$ - минимальная по угловой координате толщина смазочного слоя в среднем сечении. По этим кривым можно оценить минимальную толщину смазочного слоя в торцах подшипника после решения неизоотермической плоской задачи.

1.9. УГД задача смазки упорного подшипника скольжения.

Применительно к упорным подшипникам скольжения подробного анализа влияния деформаций на характеристики смазочного слоя не проведено до настоящего времени. В работах [1, 2] рассмотрен вопрос о влиянии

деформаций на несущую способность смазочного слоя в упорных подшипниках. Однако учет деформаций в этих работах учитывался приближенно.

Деформации определялись не путем совместного решения указанной системы уравнений, а путем определения давления в смазочном слое при жестких телах и дальнейшего определения деформаций от полученного распределения давления. Используя полученные деформации, уточнялась толщина смазочного слоя и распределение давления в смазочном слое.

Данное решение может слабо отличаться от точного, совместного, решения системы уравнений только в том случае, когда влияние деформаций на распределение давления невелико. Если деформации значительно изменяют форму зазора, то решение, полученное указанным приближенным методом, может значительно отличаться от точного решения.

В данном разделе проведен подробный анализ влияния деформаций на несущую способность смазочного слоя в упорном подшипнике с самоустанавливающейся подушкой. Анализ проведен при различных положениях опоры шарнира. Показано, что влияние деформаций на нагрузочную способность смазочного слоя зависит от положения опоры шарнира. Если опора расположена посередине подушки, что имеет место в реверсивных подшипниках, то деформации могут повысить несущую способность смазочного слоя в несколько раз. По мере удаления опоры от середины подушки влияние деформаций ослабевает.

Схема исследуемого упорного подшипника скольжения приведена на рис. 1.41

Подушка подвешена шарнирно и считается упругой плитой. Для смазки используется жидкость, в качестве реологической модели которой может быть использована модель ньютоновской жидкости. Не будем учитывать влияние давления на вязкость и плотность смазочного материала. Также не будем учитывать боковые утечки смазки.

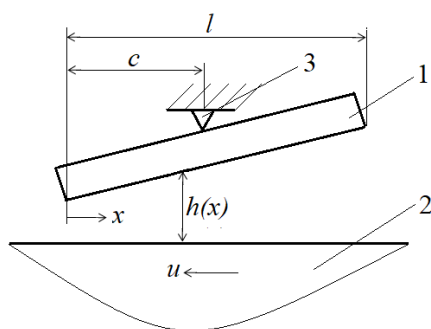


Рис. 1.41. Схема упорного подшипника скольжения с самоустанавливающейся подушкой.

1 – подушка, 2 – опора, 3 – шарнир.

При принятых допущениях распределение давления $p(x)$ в смазочном слое при известной толщине смазочного слоя $h(x)$ должно удовлетворять уравнению Рейнольдса

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) + 6\mu u \frac{dh}{dx} = 0 \quad (1.148)$$

где μ - вязкость смазочного материала, u - скорость скольжения. Толщина смазочного слоя определяется по формуле

$$h(x) = \tilde{h}_0 + x \operatorname{tg} \alpha + w_1(x) + w_2(x) \quad (1.149)$$

где $\tilde{h}_0$ - толщина смазочного слоя в точке $x=0$ без учета деформаций, α - угол наклона подушки в недеформированном состоянии, w_1 и w_2 - перемещения поверхностей подушки и опоры вследствие деформаций, соответственно. Самоустанавливающаяся подушка рассматривается как упругая пластина, перемещение поверхности которой удовлетворяет уравнению [48]

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{D} \quad (1.150)$$

где M - изгибающий момент, равный

$$\begin{aligned} M &= \int_0^x p(t)(x-t)dt, 0 \leq x \leq s \\ M &= \int_0^x p(t)(x-t)dt - Q(x-c), c \leq x \leq l \end{aligned} \quad (1.151)$$

Q - несущая способность смазочного слоя, равная

$$Q = \int_0^l p(x) dx \quad (1.152)$$

D - жесткость пластины при изгибе, равная [48] $D = EI = E\Delta^3/12$, E модуль упругости пластины, Δ - толщина пластины.

При определении перемещения поверхности опоры полагаем, что опора представляет собой упругое полупространство. В этом случае имеем [12]

$$w_2(x) = w_2(0) + \frac{2}{\pi E_c} \int_0^l p(\xi) \ln \left| \frac{\xi}{x-\xi} \right| d\xi \quad (1.153)$$

где E_c модуль упругости опоры. Интегрируя уравнение (1.150) и учитывая (1.151), (1.152), получаем

$$w_1(x) = w_1(0) + \frac{dw_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{6D} \left[\int_0^x (x-t)^3 p(t) dt - \theta(x-c) Q(x-c)^3 \right] \quad (1.154)$$

где $\theta(x)$ - функция Хэвисайда, $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$,

С учетом (1.153) и (1.154) выражение для толщины смазочного слоя (1.149) принимает вид

$$h(x) = \tilde{h}_0 + w_1(0) + w_2(0) + \frac{dw_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} x + x \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{6D} \left[\int_0^x (x-t)^3 p(t) dt - \theta(x-c) Q(x-c)^3 \right] + \frac{2}{\pi E_c} \int_0^l p(\xi) \ln \left| \frac{\xi}{x-\xi} \right| d\xi \quad (1.155)$$

Перепишем уравнение (1.155) в виде

$$h(x) = h_0 + \beta x + \frac{1}{6D} \left[\int_0^x (x-t)^3 p(t) dt - \theta(x-c) Q(x-c)^3 \right] + \frac{2}{\pi E_c} \int_0^l p(\xi) \ln \left| \frac{\xi}{x-\xi} \right| d\xi \quad (1.156)$$

Здесь $h_0 = \tilde{h}_0 + w_1(0) + w_2(0)$ - толщина смазочного слоя в точке $x=0$ с учетом

деформаций, $\beta = \frac{dw_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} + \operatorname{tg} \alpha$.

Момент сил, действующих со стороны смазочного слоя на вал, относительно точки подвеса должен равняться нулю. Это означает, что

$$\int_0^c (c-x) p(x) dx = \int_c^l (x-c) p(x) dx \quad (1.157)$$

Интегрируя уравнение (1.148) в интервале $[0; x]$, получаем

$$h^3 \frac{dp}{dx} + 6\mu u(h - h_0) - A = 0 \quad (1.158)$$

где $A = h_0^3 \frac{dp}{dx} \Big|_{x=0}$.

Функция $p(x)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$p(0) = 0, \quad p(l) = 0 \quad (1.159)$$

При решении задачи значение толщины смазочного слоя h_0 задаем, т. е. h_0 является входным параметром. Задача состоит в определении параметров A, β, Q и функций $h(x), p(x)$, удовлетворяющих уравнениям (1.156)-(1.158) и условиям (1.152), (1.159).

Введем безразмерные переменные

$$q = \frac{p}{p_0}, \quad p_0 = \frac{6\mu ul}{h_0^2}, \quad H = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l} \quad (1.160)$$

В безразмерных переменных уравнения и условия задачи принимают вид

$$H^3 \frac{dq}{d\bar{x}} = 1 - H + \bar{A} \quad (1.161)$$

$$H(\bar{x}) = 1 + \lambda \bar{x} + V \left[\int_0^{\bar{x}} (\bar{x} - t)^3 q(t) dt - \theta(\bar{x} - \bar{c}) P(\bar{x} - \bar{c})^3 \right] + V_1 \int_0^1 q(\xi) \ln \left| \frac{\xi}{\bar{x} - \xi} \right| d\xi \quad (1.162)$$

$$\int_0^{\bar{c}} (\bar{c} - \bar{x}) q(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{\bar{c}}^1 (\bar{x} - \bar{c}) q(\bar{x}) d\bar{x} \quad (1.163)$$

$$P = \int_0^1 q(\bar{x}) d\bar{x}, \quad q(0) = 0, \quad q(1) = 0. \quad (1.164)$$

$$\bar{A} = \frac{A}{6\mu u h_0}, \quad \lambda = \beta \frac{l}{h_0}, \quad V = \frac{12(1-\nu)\mu u l^5}{E h_0^3 \Delta^3}, \quad V_1 = \frac{12\mu u l^2}{\pi E_c h_0^3}$$

Коэффициент нагруженности P зависит от нагрузки на единицу длины Q

следующим образом: $Q = 6\mu u \left(\frac{l}{h_0} \right)^2 P$. Зависимость между параметрами V и V_1

имеет вид $V = \pi(1-\nu) \left(\frac{l}{\Delta} \right)^3 \frac{E_c}{E} V_1$. Из этого следует, что значение V может на

порядок и более превышать значения V_1 .

При заданных значениях параметров $V, V_1, \bar{c}$ система уравнений и условий (1.161) - (1.164) однозначно определяет значения параметров $\bar{A}, \lambda, P$ и функции $q(x)$ и $H(x)$.

Система уравнений и условий решается численно. На отрезке $[0;1]$ оси $\bar{x}$ вводим равномерную сетку $\{\bar{x}_k\}, k=1, \dots, N, \bar{x}_1=0, \bar{x}_N=1$. Интегралы заменяем конечными суммами, а производные – конечными разностями. В результате получаем систему алгебраических уравнений

$$\frac{(H_i + H_{i+1})^3}{8} \frac{(q_{i+1} - q_i)}{\Delta \bar{x}} = 1 - \frac{(H_i + H_{i+1})}{2} + \bar{A}, \quad (1.165)$$

$$i=1, 2, \dots, N-1, H_1=1, q_1=q_N=0 \quad (1.166)$$

$$H_i = 1 + \lambda \bar{x}_i + V \left[\sum_{j=1}^{i-1} (\bar{x}_i - \bar{x}_j)^3 q_j (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) - \theta (\bar{x}_i - \bar{c}) P (\bar{x}_i - \bar{c})^3 \right] + \sum_{j=2}^{N-1} q_j [g_{j,i} - g_{j,1}], \quad (1.167)$$

$$i=2, \dots, N$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} (\bar{c} - \bar{x}_j)^3 q_j (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) = \sum_{j=k}^{N-1} (\bar{x}_j - \bar{c})^3 q_j (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) \quad (1.168)$$

$$P = \sum_{j=1}^{N-1} 0.5 (q_j + q_{j+1}) (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j) \quad (1.169)$$

Здесь k - номер узла, при котором $\bar{x}_k = \bar{c}$.

$$g_{j,i} = g_j(\bar{x}_i), \quad j=2, \dots, N-1, \quad i=1, \dots, N$$

$$g_j(\bar{x}) = A_j^1(\bar{x}) + A_j^2(\bar{x}) + B_j^1(\bar{x}) + B_j^2(\bar{x}), \quad j=1, \dots, N-1$$

$$A_j^1(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}} \left[F_2(\bar{x}_j - \bar{x}) - F_2(\bar{x}_{j-1} - \bar{x}) \right]$$

$$A_j^2(\bar{x}) = \frac{\bar{x} - \bar{x}_{j-1}}{\bar{x}_j - \bar{x}_{j-1}} \left[F_1(\bar{x}_j - \bar{x}) - F_1(\bar{x}_{j-1} - \bar{x}) \right]$$

$$B_j^1(\bar{x}) = \frac{\bar{x}_{j+1} - \bar{x}}{\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j} \left[F_1(\bar{x}_{j+1} - \bar{x}) - F_1(\bar{x}_j - \bar{x}) \right]$$

$$B_j^2(\bar{x}) = -\frac{1}{\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j} \left[F_2(\bar{x}_{j+1} - \bar{x}) - F_2(\bar{x}_j - \bar{x}) \right]$$

$$F_1(\bar{x}) = \bar{x} (\ln |\bar{x}| - 1), \quad F_2(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{x}^2 \left(\ln |\bar{x}| - \frac{1}{2} \right)$$

Подставив выражения (1.166), (1.167) для переменных $q_1, q_N, H_i, i=1, \dots, N$ в уравнения (1.165), (1.168), (1.169), получим систему $N+1$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $N+1$ неизвестных $\lambda, P, \bar{A}, q_i, i=2, \dots, N-1$. Данная система уравнений решается методом Ньютона-Рафсона. После определения безразмерного давления q в узлах сетки по формулам (1.167) определяем безразмерную толщину смазочного слоя.

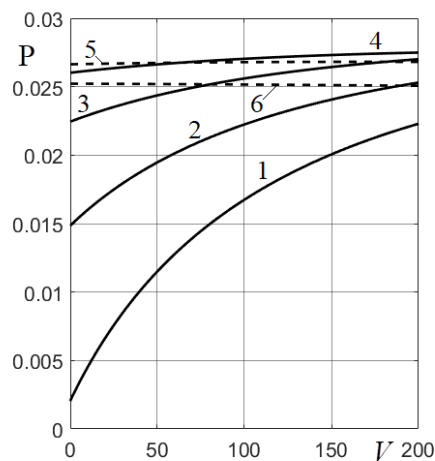


Рис. 1.42. Зависимости $P(V)$ при $V_1 = 0$ и при различных значениях параметра $\bar{c}$. Кривая 1 $\bar{c} = 0.5$, 2 - $\bar{c} = 0.48$, 3 - $\bar{c} = 0.46$, 4 - $\bar{c} = 0.44$, 5 - $\bar{c} = 0.42$, 6 - $\bar{c} = 0.4$.

На рис. 1.42 приведены зависимости коэффициента несущей способности P от параметра V при различных значениях параметра $\bar{c}$. Значению $V=0$ соответствует жесткая подушка, т. е. не учет деформаций подушки. Повышению параметра V соответствует повышение податливости поверхности подушки, т. е. возрастание деформаций поверхности подушки. Значение $\bar{c} = 0.5$ имеет место в реверсивном упорном подшипнике с самоустанавливающейся подушкой. В однонаправленных упорных подшипниках обычно используется значение $\bar{c} = 0.42$. При данном значении $\bar{c}$ и при не учете деформаций подушки несущая способность смазочного слоя принимает максимальное значение как функция параметра $\bar{c}$.

В упорных подшипниках с фиксированной подушкой используется наклон подушки, который имеет место в однонаправленных подшипниках с

самоустанавливающейся подушкой при значении $\bar{c}=0.42$ при не учете деформаций подушки.

Из результатов расчетов, приведенных на рис. 1.42, следует, что в реверсивном упорном подшипнике деформации могут повысить несущую способность смазочного слоя в несколько раз. По мере уменьшения параметра $\bar{c}$ от значения $\bar{c}=0.5$ влияние деформаций ослабевает. И при значении $\bar{c}=0.42$, т. е. в упорных подшипниках с фиксированной подушкой деформации подушки, практически, не влияют на несущую способность смазочного слоя.

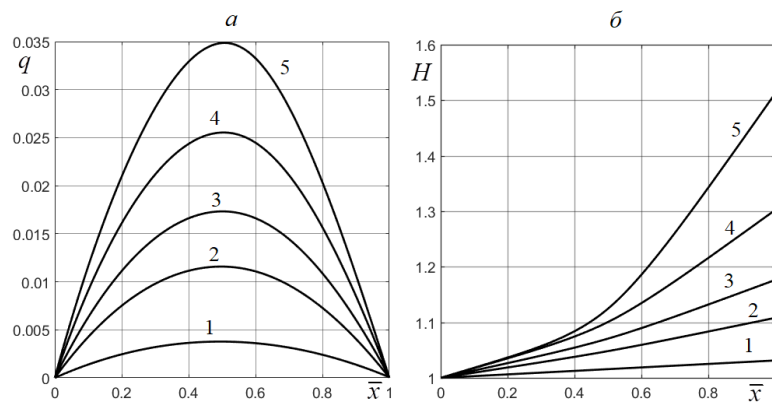


Рис. 1.43. Зависимости $q(\bar{x})$ (а) и $H(\bar{x})$ (б) при $V_1=0$, $\bar{c}=0.5$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V=0$, 2 - $V=25$, 3 - $V=50$, 4 - $V=100$, 5 - $V=200$.

На рис. 1.43 приведены зависимости $q(\bar{x})$ и $H(\bar{x})$ при значениях $V_1=0$, $\bar{c}=0.5$ и при различных значениях параметра V . Приведенные результаты указывают на то, что деформации подушки способствуют ее повороту. При этом наклон подушки относительно основы возрастает. Рост наклона подушки приводит к повышению несущей способности смазочного слоя. Кроме того, давление, действующее со стороны смазочного слоя на подушку, изгибает ее. Изгиб изменяет форму зазора, что способствует дополнительному повышению несущей способности смазочного слоя.

При уменьшении параметра $\bar{c}$ начальный наклон подушки (наклон подушки при не учете деформаций) возрастает. Это способствует повышению несущей способности смазочного слоя при не учете деформаций. Деформации повышают наклон подушки, но в меньшей степени. Это иллюстрирую

результаты расчетов, приведенные на рис. 1.44, на котором приведены зависимости $q(\bar{x})$ и $H(\bar{x})$ при значении $V_1=0$ и при различных значениях параметров V и $\bar{c}$. В результате при уменьшении параметра $\bar{c}$ влияние деформаций на несущую способность смазочного слоя ослабевает.

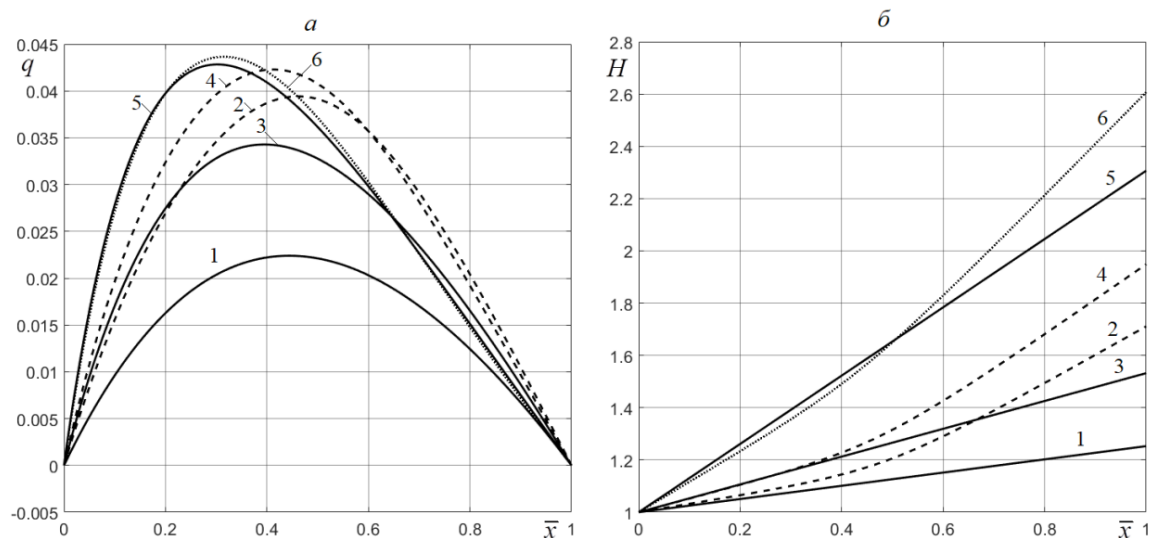


Рис. 1.44. Зависимости $q(\bar{x})$ (а) и $H(\bar{x})$ (б) при $V_1=0$ и при различных значениях параметров V и $\bar{c}$. Кривые 1 - $V=0$, $\bar{c}=0.48$, 2 - $V=200$, $\bar{c}=0.48$, 3 - $V=0$, $\bar{c}=0.46$, 4 - $V=200$, $\bar{c}=0.46$, 5 - $V=0$, $\bar{c}=0.42$, 6 - $V=200$, $\bar{c}=0.42$.

При $\bar{c}=0.42$ деформации понижают наклон подушки, и в результате форма поверхности деформированной подушки слабо отличается от формы подушки без учета деформаций. При этих значениях параметра $\bar{c}$ могут быть использованы результаты, приведенные в работах [1, 2].

Таким образом, приведенные результаты расчетов показывают, что деформации подушки в реверсивных подшипниках скольжения могут значительно (в несколько раз) повысить несущую способность смазочного слоя.

В подшипниках скольжения с фиксированной подушкой невозможен ее как поворот, так и изгиб. Это приводит к тому, что в этих подшипниках деформации подушки слабо влияют на несущую способность смазочного слоя. Также расчеты показывают, что деформации опоры понижают

несущую способность смазочного слоя, однако это понижение имеет порядок нескольких процентов.

Выводы по главе 1

В первой главе разработана математическая модель расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимальной температуры в радиальном подшипнике скольжения с частичным углом охвата, в отличие от известных моделей учитывающая изменения температуры и упругих деформаций поверхностей трения.

Предложен метод совместного численного решения уравнений контактных деформаций и движения смазочного слоя, расширяющий область применения УГД расчетов по модели по сравнению с известными методами: от малых деформаций при давлении до 1 МПа до высоких деформаций при давлении до 26 МПа, характерном для тяжело нагруженных крупногабаритных подшипников.

Рассмотрены три плоских модели подшипника. Модель в виде жесткого вала и жесткой втулки с тонким упругим вкладышем может быть использована для расчета неметаллических подшипников скольжения. Модель в виде упругого вала и упругого пространства с цилиндрическим вырезом может быть использована для расчета крупногабаритных тяжело нагруженных опор скольжения, например, опор валков прокатных станов. Модель подшипника в виде упругого вала и упругого пространства с цилиндрическим вырезом при наличии тонкого упругого вкладыша с малым модулем упругости может быть использована при оптимизации конструкций крупногабаритных опор скольжения с целью повышения несущей способности.

Приведены новые решения УГД задач в виде семейств кривых зависимостей коэффициента нагруженности от коэффициента податливости при различных значениях отношения минимальной толщины смазочного слоя к радиальному зазору. Данные семейства кривых могут быть использованы для приближенных расчетов радиальных подшипников скольжения с учетом

деформаций без обращения к программным комплексам. Приведены примеры таких расчетов.

Проведен анализ решений УГД задач. Установлены закономерности в зависимости несущей способности радиального подшипника от коэффициента податливости. Определены условия, при которых влияние деформаций на несущую способность радиального подшипника мало и для расчетов подшипников можно использовать решения ГД задач..

Изложен метод численного решения пространственной неизотермической УГД задачи смазки радиального подшипника скольжения. Приведены решения пространственных неизотермических УГД задач.

Получено решение ГД задачи для радиальных подшипников скольжения с частичным углом охвата. Данное решение является предельным решением УГД задач и может быть использовано для расчета опор скольжения с частичным углом охвата в условиях слабого влияния деформаций на решение УГД задачи.

Рассмотрена УГД задача для упорного подшипника скольжения. Проведен анализ решений задачи. Впервые показано, что деформации подушки в реверсивных подшипниках скольжения могут значительно (более чем в два раза) повысить несущую способность смазочного слоя. Приведенные в диссертации семейства кривых могут быть использованы при расчетах реверсивных упорных подшипников скольжения на стадии проектирования.

Основные результаты главы опубликованы в работах [13 – 16, 24, 30, 39, 51, 69, 70, 141].

ГЛАВА 2. СТАЦИОНАРНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ КОНТАКТ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОГО СМАЗОЧНОГО МАТЕРИАЛА

Стационарным задачам теории смазки упругих тел при локальном контакте посвящено большое количество работ [4, 5, 11, 12, 27, 45, 46, 72, 78, 83, 85 - 96, 105 - 109, 118 - 124, 127 - 130, 135, 140, 149 - 151]. Предложено несколько методов численного решения данных задач. Однако область сходимости итерационных процессов в предложенных численных методах, как правило, ограничена. Поэтому до настоящего не проведено подробное исследование решения УГД при переходе от одного предельного случая к другому предельному случаю. Не полностью исследована роль деформаций в формировании толщины смазочного слоя. Наличие такого исследования позволяет разрабатывать оптимальные конструкции узлов трения и подбирать оптимальные физико-механические параметры элементов конструкции. До настоящего времени отсутствуют методики расчета максимального давления в локальном контакте с учетом второго пика давления.

В данной главе предложен метод численного решения УГД задач, обладающий сходимостью итераций в широком диапазоне изменения входных параметров. Получены новые решения УГД задачи смазки линейного локального контакта, позволяющие проводить расчеты минимальной толщины смазочного слоя и максимального давления в нем в широком диапазоне изменения коэффициента жесткости. Определены условия, при которых максимальное давление в смазочном слое можно определять по формуле Герца, а также условия, при которых максимальное давление в смазочном слое превышает давление по Герцу более чем в 1.6.

раза. Проведено исследование влияния деформаций на высоту неровностей профиля шероховатых поверхностей.

Предельными решениями задач теории смазки являются решение задачи о контакте деформируемых тел при отсутствии смазки и решение задачи о смазке жестких тел. Исследование свойств данных предельных решений представляет интерес, так как этими свойствами должны проявляться в решениях контактных задач со смазкой в окрестностях предельных случаев.

2.1. Смазка жестких цилиндров

При малых нагрузках деформации тел малы и их влияние на характеристики смазочного слоя незначительны. Это означает, что в пределе, при отношении максимального давления в области контакта к модулю упругости, стремящемуся к нулю, решение задачи теории смазки для деформируемых тел должно стремиться к решению задачи для жестких тел.

Задачи о смазке жестких тел при их внешнем контакте в случае постоянной вязкости смазочного материала рассматривались в работах [12, 31]. В них приведены выражения для минимальной толщины смазочного слоя для случая обильной смазки [31], и для случая как обильной, так и скудной смазки [12]. При постоянной вязкости задача допускает аналитическое решение, которое и получено в указанных работах.

При учете влияния давления на вязкость и плотность смазочного материала задача существенно усложняется и не допускает аналитического решения. Ниже приведено численное решение задачи как для ньютоновской модели смазки, так и для модели Эйринга. Проведен анализ влияния параметров смазки на решение задачи. Ниже будет показано, что некоторые свойства решения задач для жестких тел проявляются и в задачах о смазке

деформируемых тел вплоть до высоких нагрузок. Поэтому с точки зрения понимания всех процессов, протекающих в смазываемых внешних (локальных) контактах деформируемых тел, исследование свойств решения задач о смазке жестких тел представляет определенный интерес.

Метод численного решения, излагаемый в данной работе и позволяющий получать решение при любых значениях входных параметров, оказывается эффективным при его распространении на задачи о смазке деформируемых тел.

Рассмотрим стационарное движение тонкого смазочного слоя между двумя вращающимися с постоянными скоростями жесткими цилиндрами (рис. 2.1).

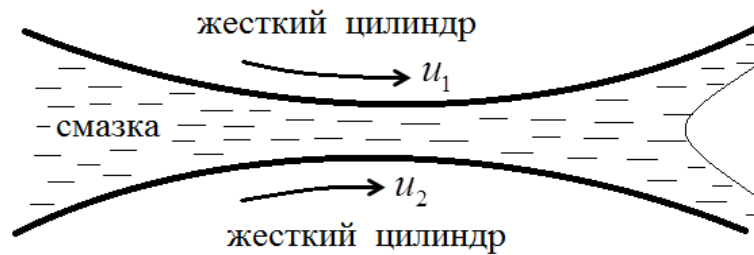


Рис. 2.1. Схема смазываемого контакта жестких цилиндрических тел

Рассмотрим реологические модели Ньютона и Эйринга смазочного материала. Зависимость вязкости смазки от давления примем в виде модели Баруса. Стационарное уравнение Рейнольдса для жидкости Эйринга в плоском случае приведено в работе [86]. Его можно представить в виде

$$\tilde{\rho} u \tilde{h} - \frac{\tilde{\rho} \tilde{h}^3}{4\tilde{\mu}} \frac{\beta \operatorname{ch}(\beta) - \operatorname{sh}(\beta)}{(\beta)^3} \sqrt{1 + \left[\frac{\tilde{\mu} u_s}{\tau_0 \tilde{h}} \frac{\beta}{\operatorname{sh}(\beta)} \right]^2} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} = \tilde{\rho}_0 u \tilde{h}_0, \quad \tilde{a} < \tilde{x} < \tilde{c} \quad (2.1)$$

где $\beta = \frac{\tilde{h}}{2\tau_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}$, $\tilde{c}$ - координата выходной граничной точки смазочного слоя

(координата точки, в которой происходит разрушение смазочного слоя),

$\tilde{h}_0 = \tilde{h}(\tilde{c})$, $\tilde{\rho}_0$ - плотность смазки при атмосферном давлении, $u_s = u_1 - u_2$ -

скорость скольжения, $u = (u_1 + u_2)/2$ - скорость качения, τ_0 - константа, называемая постоянной Эйринга. В этой модели касательные напряжения возрастают медленнее с ростом скорости сдвига, чем в модели Ньютона, что лучше соответствует экспериментальным данным. При $\beta \rightarrow 0$ уравнение (2.1) переходит в уравнение Рейнольдса для Ньютоновских жидких смазочных материалов

$$\tilde{\rho} u \tilde{h} - \frac{\tilde{\rho} \tilde{h}^3}{12 \tilde{\mu}} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} = \tilde{\rho}_0 u \tilde{h}_0 \quad (2.2)$$

Другие уравнения и условия, определяющие толщину смазочного слоя и давление в нем, в случае жестких тел имеют вид

$$\tilde{h}(\tilde{x}) = \tilde{h}_0 + \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{c}^2}{2R} \quad (2.3)$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 \exp(\alpha_p \tilde{p}), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \left(1 + \frac{\tilde{C}_1 \tilde{p}}{1 + \tilde{C}_2 \tilde{p}} \right) \quad (2.4)$$

$$\tilde{p}(\tilde{a}) = 0, \quad \tilde{p}(\tilde{c}) = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=\tilde{c}} = 0 \quad (2.5)$$

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{c}} \tilde{p}(\tilde{x}) d\tilde{x} = W \quad (2.6)$$

где $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ - приведенный радиус, W - нагрузка, отнесенная к единице длины цилиндров.

Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$x = \frac{\tilde{x}}{b_r}, \quad b_r = R \sqrt{\frac{24\pi\mu_0 u}{W}}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{p_r}, \quad p_r = \sqrt{\frac{W^3}{6\pi^3 \mu_0 u R^2}},$$

$$h = \frac{2R\tilde{h}}{b_r^2} = \frac{W}{12\pi\mu_0 u R} \tilde{h}, \quad a = \frac{\tilde{a}}{b_r}, \quad c = \frac{\tilde{c}}{b_r}, \quad b_r p_r = \frac{2}{\pi} W$$

В безразмерных переменных уравнения принимают вид

$$-\rho h^3 \exp(-Gp) \frac{3\beta ch(\beta) - 3sh(\beta)}{\beta^3} \sqrt{1 + \left[\frac{S \cdot S_1}{h} \frac{\beta}{sh(\beta)} \exp(Gp) \right]^2} \frac{dp}{dx} + \rho h = H, \quad (2.7)$$

$$a < x < c$$

$$h(x) = H + x^2 - c^2 \quad (2.8)$$

$$\rho = 1 + \frac{C_1 p}{1 + C_2 p} \quad (2.9)$$

$$p(a) = 0, \quad p(c) = 0 \quad (2.10)$$

$$\int_a^c p(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad (2.11)$$

$$\text{где } \beta = S \frac{h}{2} \frac{dp}{dx}, \quad S = \frac{W}{2\pi R \tau_0}, \quad S_1 = \frac{1}{6} \frac{u_s}{u}, \quad G = \alpha_p p_r$$

$$C_1 = \tilde{C}_1 p_r, \quad C_2 = \tilde{C}_2 p_r, \quad H = \frac{2R\tilde{h}_0}{b_r^2}$$

При значении $S = 0$ уравнение (2.7) принимает вид

$$-\rho h^3 \exp(-Gp) \frac{dp}{dx} + \rho h = H, \quad (2.12)$$

соответствующий случаю Ньютоновской смазки.

Система уравнений и условий (2.7) - (2.11) однозначно определяет параметры H , c и функции $h(x)$ и $p(x)$, если заданы значения параметров a , G, C_1, C_2, S и S_1 . Параметр a будем задавать достаточно большим, чтобы решение задачи слабо зависело от его увеличения. Тогда решение задачи будет зависеть от пяти параметров: G, C_1, C_2, S и S_1 .

После решения данной системы уравнений можно определить составляющие сил трения, действующих на поверхности тел, а также составляющие коэффициента трения

$$\begin{aligned} f_{t,\Sigma} &= \frac{T_{t,\Sigma}}{W} = \frac{1}{W} \int_a^c \left[\tau_0 \operatorname{arcsch} \left(\frac{\mu \beta U_s}{\tau_0 h \operatorname{sh}(\beta)} \right) + \frac{\tilde{h}}{2} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \right] d\tilde{x} = f_s + f_t = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{b_r}{R} \int_a^c \left[S_2 \operatorname{arcsch} \left(S_3 \frac{1}{h} \frac{\beta}{\operatorname{sh}(\beta)} \exp(p) \right) + \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \right] dx = \frac{1}{\pi} \frac{b_r}{R} (\bar{f}_s + \bar{f}_t) = \\ &= \sqrt{\frac{24\mu_0 u}{\pi W}} (\bar{f}_s + \bar{f}_t) \quad (2.13) \\ \bar{f}_s &= \int_a^c S_2 \operatorname{arcsch} \left(S_3 \frac{1}{h} \frac{\beta}{\operatorname{sh}(\beta)} \exp(p) \right) dx, \quad \bar{f}_t = \int_a^c \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx \\ f_r &= \frac{T_r}{W} = -\frac{1}{WR} \int_a^c \tilde{x} \tilde{p}(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{2}{\pi} \frac{b_r}{R} \bar{f}_r = \sqrt{\frac{96\mu_0 u}{\pi W}} \bar{f}_r, \quad \bar{f}_r = -\int_a^c x p(x) dx \end{aligned}$$

и коэффициент трения $f = f_s + f_t + f_r$. В (2.13) $S_2 = \frac{\pi R \tau_0}{W}$, $S_3 = \frac{2\mu_0 U_s R}{\tau_0 b_r^2}$,
 $U_s = |U_2 - U_1|$.

Свойства функции $\rho(x)$. В уравнении (2.7) учтено, что $\rho(c)=1$. Из (2.7) следует, что производная dp/dx равна нулю в точках, в которых выполняется соотношение $\rho h = H$ или, учитывая (2.8), в точках x_m , в которых выполняется соотношение

$$\rho(x)(H + x^2 - c^2) = H$$

Из данного соотношения следует

$$x = \sqrt{c^2 - \frac{\rho(x)-1}{\rho(x)}H} \quad (2.14)$$

Одной из точек, в которых выполняется соотношение (2.14), является точка $x = c > 0$, в которой $\rho(c)=1$, так как $p(c)=0$.

Второй точкой, в которой выполняется соотношение (2.14), является точка

$$x_m = -\sqrt{c^2 - \frac{\rho(x_m)-1}{\rho(x_m)}H}$$

В этой точке давление имеет максимум. При не учете изменения плотности смазки с ростом давления, то есть при $\rho = 1$ последнее выражение принимает вид $x_m = -c$.

Таким образом, при не учете изменения плотности смазки с изменением давления функция $p(x)$ растет на отрезке $(-\infty, -c)$, достигает максимума в точке $x = -c$ и падает до нуля на отрезке $(-c, c)$.

При не учете изменения вязкости и плотности смазочного материала с изменением давления задача допускает аналитическое решение, из которого следует [12, 31]

$$\tilde{h}_{\min} = \frac{4.895\mu_0 u R}{W} = \frac{2.45\mu_0 (u_1 + u_2) R}{W}, \quad \tilde{c} = 1.487 R \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}},$$

$$\tilde{p}_{\max} = 0.199 \frac{W}{R} \sqrt{\frac{W}{\mu_0 u}}, \quad f = \left(0.718 + 0.148 \frac{U_s}{u} \right) \frac{b_r}{R} = \left(6.235 + 1.285 \frac{U_s}{u} \right) \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что при фиксированной скорости скольжения коэффициент трения растет с ростом скорости качения и падает с ростом нагрузки. При фиксированной скорости качения коэффициент трения растет с ростом скорости скольжения по линейному закону.

График функции $p(x)$ при $S = S_1 = G = C_1 = 0$ приведен на рис. 2.2. Отметим, что в данном случае нетрудно получить соотношение

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 2 \frac{3H - 2h}{h^4} x$$

откуда следует, что $d^2 p/dx^2 = 0$ при значении $x = 0$. Это означает, что точка $x = 0$ в данном случае является точкой перегиба функции $p(x)$.

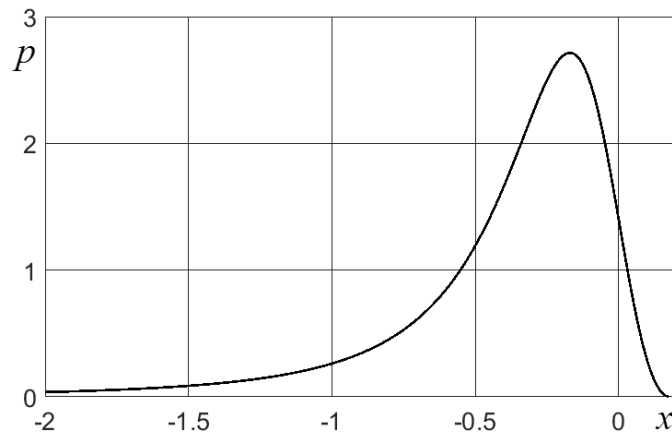


Рис. 2.2. Зависимость $p(x)$ при $S = S_1 = G = C_1 = 0$

При учете изменения плотности смазки с изменением давления координата точки максимума давления удовлетворяет условиям $-c < x_m < 0$.

Метод численного решения системы уравнений. Систему уравнений (2.7) - (2.12) при условиях (2.10) решаем следующим образом. На отрезке

$[a, c]$ вводим неравномерную сетку $\{x_k, k=0,1,...,N; x_0=a; x_N=c\}$. В соответствии со вторым условием (2.10) принимаем

$$p_0 = p(a) = 0, \quad p_N = p(x_N) = 0 \quad (2.16)$$

Уравнение (2.7) в интервале $[x_{k-1}, x_k]$ заменяем приближенным конечно-разностным уравнением

$$\begin{aligned} \rho_k h_{k-\frac{1}{2}}^3 \{1 - \exp[G(p_k - p_{k-1})]\} \Psi\left(\beta_{k-\frac{1}{2}}\right) \sqrt{1 + \left[\frac{S_1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \frac{\beta_{k-\frac{1}{2}}}{\operatorname{sh}\left(\beta_{k-\frac{1}{2}}\right)} \exp(Gp_k) \right]^2} = \\ = G \left(H - \rho_k h_{k-\frac{1}{2}} \right) \exp(Gp_k), \quad k=1,...,N \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\text{где } \Psi\left(\beta_{k-\frac{1}{2}}\right) = \frac{3 \left[\beta_{k-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}\left(\beta_{k-\frac{1}{2}}\right) - \operatorname{sh}\left(\beta_{k-\frac{1}{2}}\right) \right]}{\beta_{k-\frac{1}{2}}^3}, \quad \beta_{k-\frac{1}{2}} = S \frac{h_{k-\frac{1}{2}}}{2} \frac{(p_k - p_{k-1})}{\Delta x}$$

$$h_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(h_{k-1} + h_k) = H - c^2 + \frac{1}{2}(x_{k-1}^2 + x_k^2) \quad (2.18)$$

$$\rho_k = 1 + \frac{C_1 p_k}{1 + C_2 p_k} \quad (2.19)$$

В уравнении (2.11) интеграл заменяем конечной суммой

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) (x_k - x_{k-1}) = \frac{\pi}{2} \quad (2.20)$$

Уравнения (2.17) после подстановки в них выражений (2.18) и (2.19) совместно с условиями (2.16), (2.20) представляют собой систему $N+3$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $N+3$ неизвестных: $H, c, p_0, ..., p_N$.

На рис. 2.3 приведена блок-схема алгоритма численного решения данной системы уравнений. После задания значений входных параметров задаем начальное приближение для неизвестной H . При заданном значении H итерациями находим такое значение переменной c , при котором выполняется с заданной точностью первое условие (2.16).

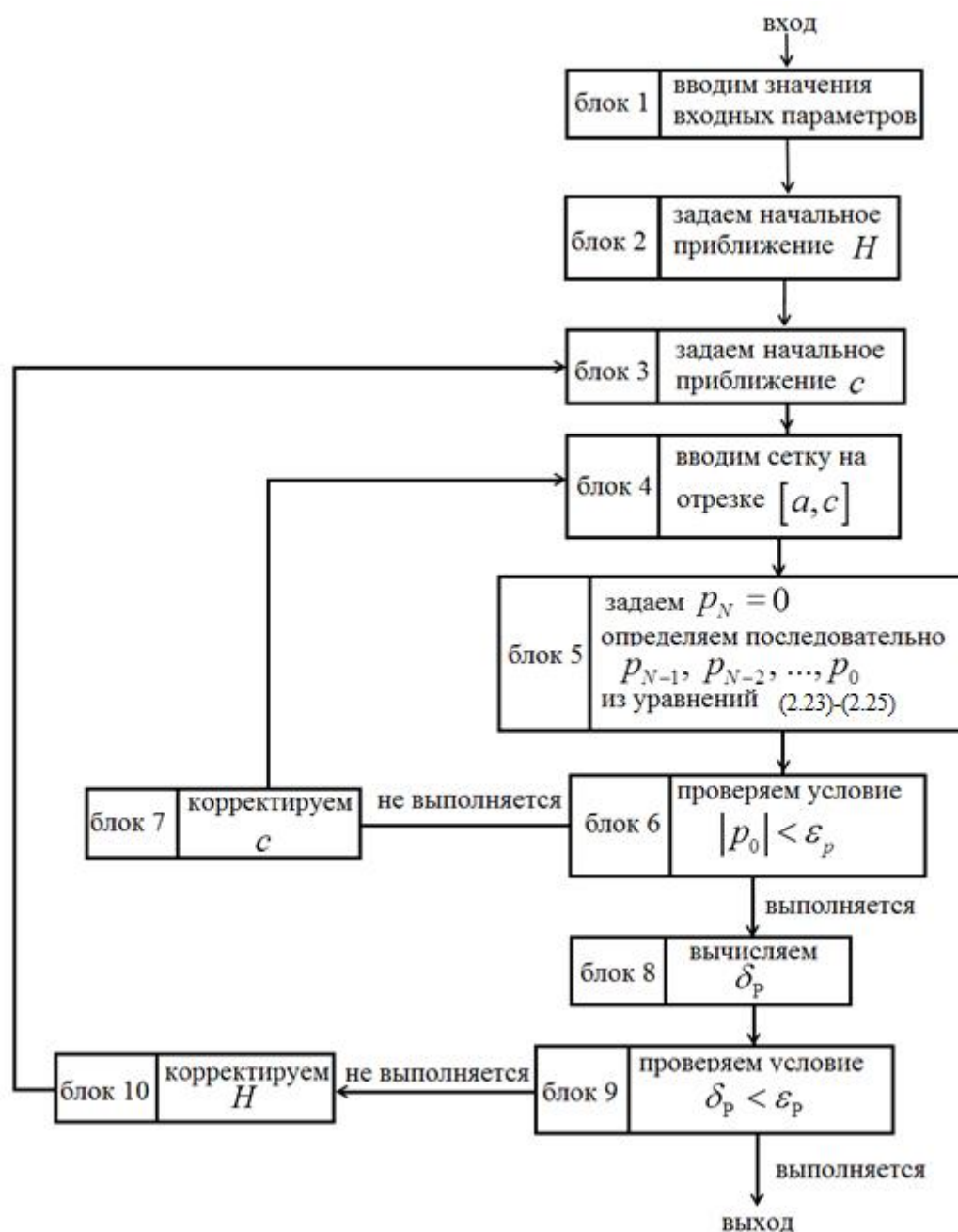


Рис. 2.3. Блок схема алгоритма решения системы уравнений (2.22)-(2.26)

Для этого задаем начальное приближение переменной c . Из условия $h > 0$ при всех $x \in [a, c]$ и выражения (2.8) следует, что $H + x^2 - c^2 > 0$, откуда $c^2 < H + x^2 < H$. Таким образом, должно выполняться условия

$$0 < c < \sqrt{H} \quad (2.21)$$

Начальное приближение c выбираем с учетом соотношения (2.21). Вводим сетку на отрезке $[a, c]$. Принимаем $p_N = 0$ и последовательно

определяем с заданной точностью значения $p_{N-1}, p_{N-2}, \dots, p_0$, решая уравнения (2.17) после подстановки в них выражения (2.18) - (2.19). Метод решения уравнения (2.17) относительно p_{k-1} при заданном значении p_k ($k = N, N-1, \dots, 1$) изложен ниже.

Определив значения p_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$), проверяем выполнения первого условия (2.16) с заданной точностью. Точность выполнения этого условия задается параметром ε_p . Если выполняется условие $|p_0| \leq \varepsilon_p$, то значение параметра c при заданном значении H найдено и переходим к проверке выполнения условия (2.20) с заданной точностью.

Если получилось $|p_0| > \varepsilon_p$, то корректируем значение c . Эта коррекция производится следующим образом. Если получилось $p_0 < 0$, то значение c увеличиваем, если получилось $p_0 > 0$, то значение c уменьшаем. Далее продолжаем выполнять вычисления, указанные в блоках 4, 5, и снова проверяем выполнение условия $|p_0| \leq \varepsilon_p$. Повторяем данные вычисления до тех пор, пока условие $|p_0| \leq \varepsilon_p$ не выполнится.

Выходная координата c должна удовлетворять условию (2.21). Нетрудно показать, что в граничных точках интервала определения переменной c переменная $p_0 = p(a)$ принимает значения разных знаков. Рассмотрим случай Ньютоновской жидкости. Из уравнения (2.12) следует, что при заданном значении c значение $p_0 = p(a)$ равно

$$p_0(c) = p(c) + \int_c^a \frac{\rho h - H}{\rho h^3} \exp(Gp) dx = 0 - \int_a^c \frac{H(\rho - 1) + \rho(x^2 - c^2)}{\rho h^3} \exp(Gp) dx$$

откуда следует

$$p_0(0) = - \int_a^0 \frac{H(\rho - 1) + \rho x^2}{\rho h^3} \exp(Gp) dx < 0$$

так как $\rho \geq 1$ и подынтегральная функция положительна везде, кроме точки, в которой $\rho = 1$ и $x = 0$.

Покажем, что если $\rho=1$, то когда значение c^2 близко к H , выполняется соотношение $p_0 > 0$. Пусть $c^2 = H - \varepsilon^2$, где ε мало. Примем $a = -\infty$. Тогда при выполнении условия $p(c) = 0$ получаем

$$p(a) = -[p(c) - p(a)] = - \int_{-\infty}^{\sqrt{H-\varepsilon^2}} \frac{\varepsilon^2 + \xi^2 - H}{(\varepsilon^2 + \xi^2)^3} d\xi = \Pi_3 - I_2$$

где

$$I_k = \int_{-\infty}^{\sqrt{H-\varepsilon^2}} \frac{d\xi}{(\varepsilon^2 + \xi^2)^k}, \quad k = 2, 3$$

Применяя формулу интегрирования по частям, можно получить соотношения

$$I_3 = \frac{1}{4\varepsilon^2} \frac{\sqrt{H-\varepsilon^2}}{H^2} + \frac{3}{4\varepsilon^2} I_2, \quad I_2 = \frac{1}{2\varepsilon^2} \frac{\sqrt{H-\varepsilon^2}}{H} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \left[\frac{\pi}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{H-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right]$$

$$I_2 \rightarrow +\infty, \quad p_0 = p(a) = \frac{1}{4\varepsilon^2} \frac{\sqrt{H-\varepsilon^2}}{H} + I_2 \left(\frac{3H}{4\varepsilon^2} - 1 \right) \rightarrow +\infty \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Таким образом, функция $p_0(c)$ отрицательна при значении $c = 0$ и $p_0 \rightarrow +\infty$ при значении $c \rightarrow \sqrt{H}$. Это означает, что на интервале $(0, \sqrt{H})$ существует единственный корень уравнения $p_0(c) = 0$, который может быть найден методом дихотомии (методом деления отрезков пополам).

Продолжим изложение метода численного решения задачи. После выполнения условия $|p_0| \leq \varepsilon_p$ переходим к проверке выполнения условия (2.20) с заданной точностью. Для этого вычисляем погрешность

$$\delta_p = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) (x_k - x_{k-1}) - \frac{\pi}{2}$$

Если получилось $|\delta_p| \leq \varepsilon_p$, где ε_p - заданная величина, определяющая точность выполнения условия (2.20), то решение с заданной точностью получено.

Если получилось $|\delta_p| > \varepsilon_p$, то делаем коррекцию H и продолжаем вычисления, начиная с блока 3 на рис. 2.3. Коррекцию H делаем следующим образом. При значении $\delta_p < 0$ значение H уменьшаем, а при значении $\delta_p > 0$ - увеличиваем.

Сходимость итераций по переменной H обусловлена тем, что интеграл $I_Q = \int_a^c p(x) dx$, где $p(x)$ есть решение системы (2.7) - (2.11) при заданном значении H , монотонно возрастает при убывании H , причем $I_Q \rightarrow +\infty$ при $H \rightarrow 0$ и $I_Q \rightarrow 0$ при $H \rightarrow \infty$.

Перейдем к методу решения уравнения (2.17) относительно p_{k-1} при заданном значении p_k . При известном значении p_k уравнение (2.17) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно $\Delta p = p_k - p_{k-1}$. Преобразуем это уравнение к виду

$$\Delta p = f(\Delta p) \quad (2.22)$$

$$\text{где } f(\Delta p) = \frac{1}{G} \ln \left[1 - \frac{m}{\bar{\Psi}(\Delta p) \sqrt{1 + \left[\frac{n_1 \Delta p}{sh(n \Delta p)} \right]^2}} \right] \quad (2.23)$$

$$m = \frac{G \left(H - \rho_k h_{k-\frac{1}{2}} \right) \exp(G p_k)}{\rho_k h_{k-\frac{1}{2}}^3}, \quad n = \frac{Sh_{k-\frac{1}{2}}}{2 \Delta x}, \quad n_1 = \frac{S_1 S}{2 \Delta x}, \quad \bar{\Psi}(\Delta p) = 3 \frac{[n \Delta p ch(n \Delta p) - sh(n \Delta p)]}{(n \Delta p)^3}$$

При $S_1 = 0$ функция $f(\Delta p)$ имеет вид

$$f(\Delta p) = \frac{1}{G} \ln \left[1 - \frac{m}{\bar{\Psi}(\Delta p)} \right]$$

Функция $\bar{\Psi}(\Delta p)$ является четной, монотонно возрастающей с ростом $|\Delta p|$ от значения $\bar{\Psi}(0) = 1$ до значения $+\infty$. Отсюда следует, что при значениях $m < 0$ и при возрастании $|\Delta p|$ функция $f(\Delta p)$ монотонно убывает от значения

$f(0) = \frac{1}{G_r} \ln(1-m) > 0$ до значения $f(\infty) = 0$. График функции $f(\Delta p)$ при значениях $G=1$, $m=-300$, $n=3$ представлен на рис. 2.12 (кривая 1). При значениях $1 \geq m > 0$ функция $f(|\Delta p|)$ монотонно возрастает от значения $f(0) = \frac{1}{G_r} \ln(1-m) < 0$ до нуля при $|\Delta p| \rightarrow \infty$.

График функции $f(\Delta p)$ при значениях $G=1$, $m=0,99$, $n=3$ представлен на рис. 2.12 (кривая 2). Кривая 3 на рис. 2.12 представляет собой график функции $f(\Delta p) = \Delta p$. Координата точки пересечения кривых 1 и 3 дает решение уравнения (2.28) при $m=-300$. Координата точки пересечения кривых 2 и 3 дает решение уравнения (2.28) при $m=0.99$.

Рисунок 2.4 наглядно демонстрирует единственность решения уравнения (2.22) при указанных значениях параметра m . Это решение имеет отрицательное значение при $1 \geq m > 0$, чему соответствует $H > \rho_k h_{k-\frac{1}{2}}$, и положительное значение при $m < 0$, чему соответствует $H < \rho_k h_{k-\frac{1}{2}}$.

Аналогично можно показать, что при значениях $m > 1$ уравнение (2.22) имеет единственное решение $\Delta p < 0$.

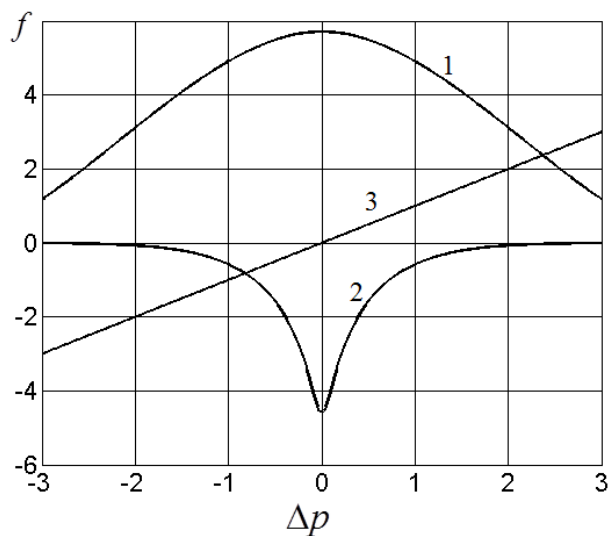


Рис. 2.4. Графики функции $f(\Delta p)$

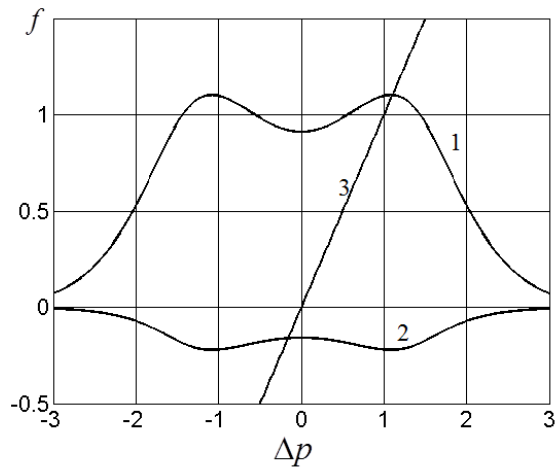


Рис. 2.5. Зависимости $f(\Delta p)$ при $G=1$, $n=3$, $n_1=20$, $m=-10$ (кривая 1) и $m=0,99$ (кривая 2).

Если $S > 0$, $S_1 > 0$ и, соответственно, $n_1 > 0$, то поведение функции $f(\Delta p)$, имеющей вид (2.23), более сложное, однако уравнение (2.22) также имеет единственное решение. На рис. 2.5 для примера приведены зависимости $f(\Delta p)$ при $G=1$, $n=3$, $n_1=20$, $m=-10$ (кривая 1) и $m=0,99$ (кривая 2).

Влияние роста вязкости смазки с ростом давления. Влияние параметра G на давление и толщину смазочного слоя иллюстрируют кривые, приведенные на рис. 2.6, на котором приведены зависимости $h(x)$ и $p(x)$ при различных значениях параметра G и при $S=0$, $S_1=0$, $C_1=0$, т. е. для случая ньютоновской модели смазки при не учете изменения плотности смазки с изменением давления.

Из приведенных результатов расчетов следует, что с ростом параметра G максимальное давление растет. При этом график давления в окрестности точки максимума заостряется, а точка максимума смещается влево, в сторону входа в область гидродинамического контакта. Ниже будет показано, что этот острый максимум давления с ростом влияния объемных деформаций перемещается вправо и переходит в известный второй пик давления.

Выходная граница смазочного слоя с ростом G смещается вправо, хотя это смещение невелико. Толщина смазочного слоя растет с ростом значения параметра G .

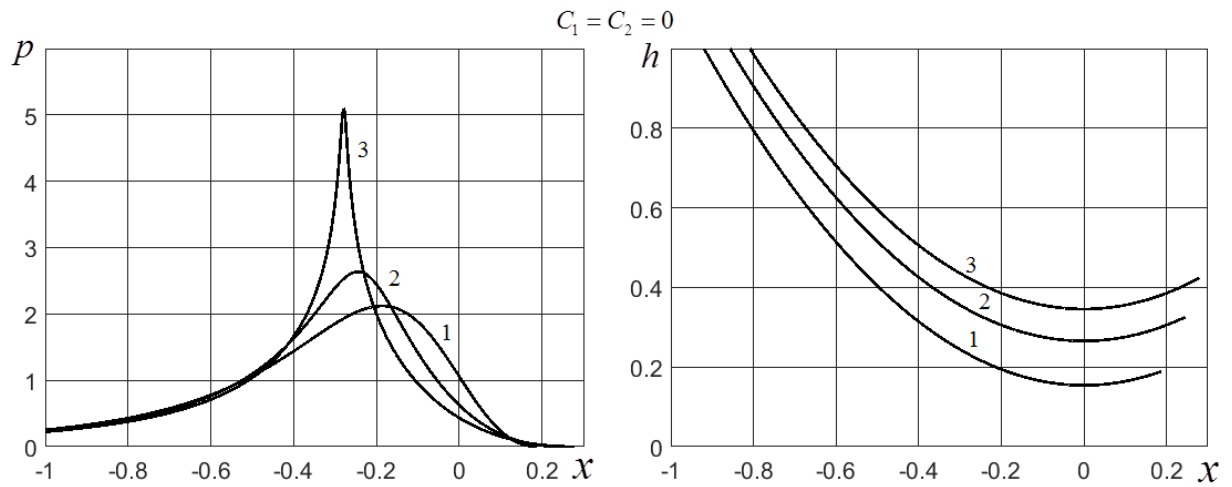


Рис. 2.6. Зависимости $h(x)$ и $p(x)$ при не учете изменения плотности смазки с изменением давления ($\rho=1$) и при различных значениях параметра G . Кривые 1 - $G=0$, 2 - $G=1$, 3 - $G=1.6$

Влияние сжимаемости смазочного материала. На рис. 2.7 приведены результаты расчетов при учете зависимости плотности смазки от давления. Расчеты проводились при значениях параметров $C_1 = 0,6$; $C_2 = 1,7$.

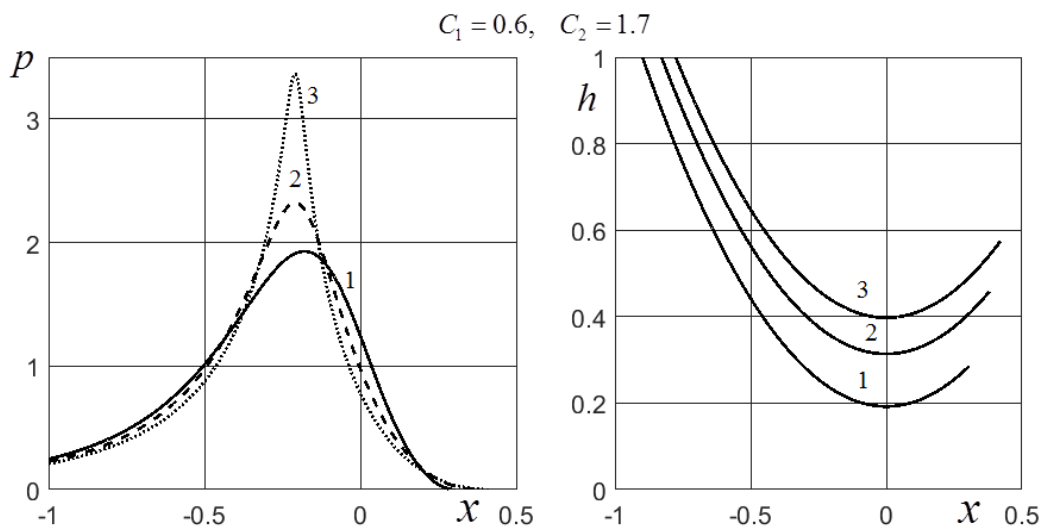


Рис. 2.7. Зависимости $h(x)$ и $p(x)$ при $C_1 = 0,6$; $C_2 = 1,7$ и при различных значениях параметра G . Кривые 1 - $G=0$, 2 - $G=1$, 3 - $G=1.6$

Сопоставление результатов расчетов, приведенных на рис. 2.7 и на рис. 2.6, показывает, что сжимаемость смазки может существенно понижать максимальное давление при высоких значениях параметра G . При этом острота пика давления существенно понижается. Давление становится более равномерно распределенным по области контакта, которая расширяется вправо. Ниже будет показано, что сжимаемость смазки существенно понижает высоту второго пика давления.

Расширение области контакта и понижение максимального давления приводят к небольшому росту минимальной толщины смазочного слоя.

Влияние неньютоновских свойств смазки. Рассмотрим модель Эйринга. Сначала рассмотрим влияние параметра S при отсутствии скольжения, т.е. при значении $S_1 = 0$. Влияние параметра S на распределение давления и толщину смазочного слоя при малом значении параметра G иллюстрируют зависимости $p(x)$ и $h(x)$, приведенные на рис. 2.8. Эти зависимости получены при значениях $G = 0.25$, $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$ и при различных значениях параметра S .

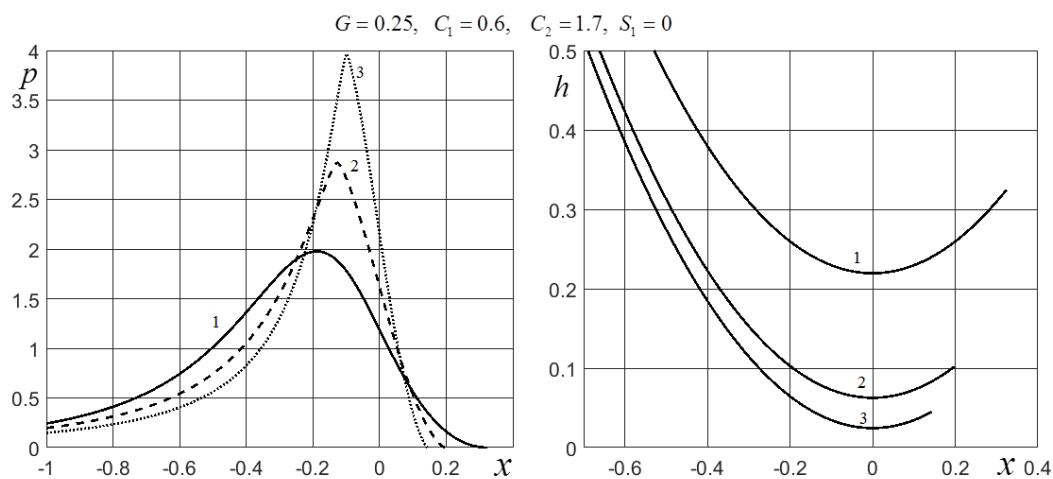


Рис. 2.8. Зависимости $h(x)$ и $p(x)$ при $G = 0.25$, $C_1 = 0.6$; $C_2 = 1.7$ и при различных значениях параметра S . Кривые 1 - $S = 0$, 2 - $S = 15$, 3 - $S = 30$

В модели Эйринга касательные напряжения, возникающие в жидкости, при прочих равных условиях ниже, чем в модели ньютоновской жидкости. При более низких касательных напряжениях, поток жидкости, переносимый

поверхностями в сужающийся зазор, становится меньше, что приводит к более медленному росту давления при движении в зазоре. Чтобы обеспечить необходимую силу со стороны смазочного слоя на поверхности, толщина смазочного слоя уменьшается. Уменьшение толщины смазочного слоя приводит к росту давления.

Таким образом, при малых значениях параметра G , когда изменение вязкости смазки с изменением давления мало, на формирование давления влияют два фактора: уменьшение касательных напряжений понижают давление, а уменьшение толщины смазочного слоя повышают его.

В результате получается следующий характер изменения функции распределения давления с ростом значения параметра S (рис. 2.8, левая часть). Во входной области зазора и на выходе из него давление понижается, а в области высокого давления – повышается.

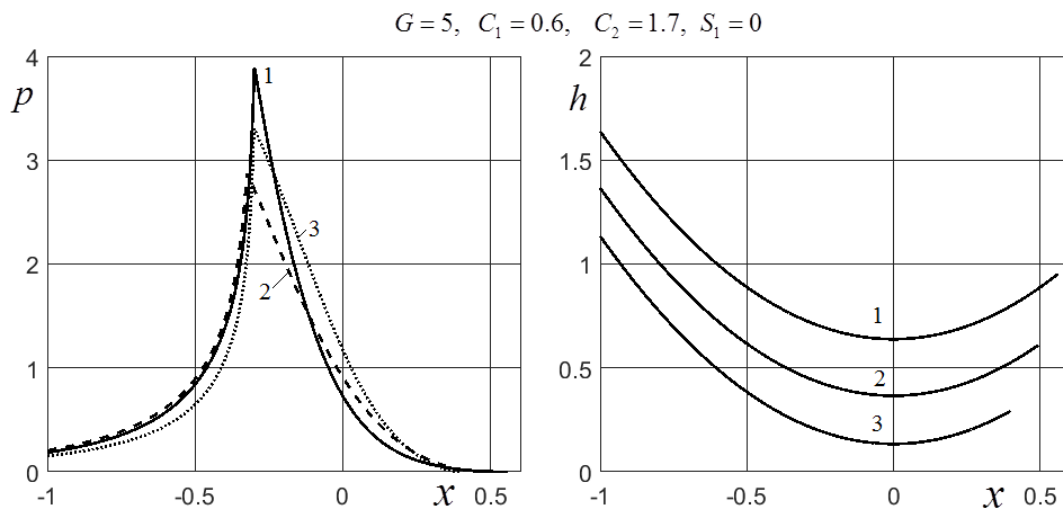


Рис. 2.9. Зависимости $h(x)$ и $p(x)$ при $G=5$, $C_1=0,6$; $C_2=1,7$ и при различных значениях параметра S . Кривые 1 - $S=3$, 2 - $S=10$, 3 - $S=20$

При высоких значениях параметра G (рис. 2.9) ситуация меняется. Высоким значениям параметра G соответствуют высокие значения острого максимума давления. Понижение касательных напряжений в смазке приводит к понижению остроты графика функции $p(x)$ в точке максимума и к понижению самого максимума.

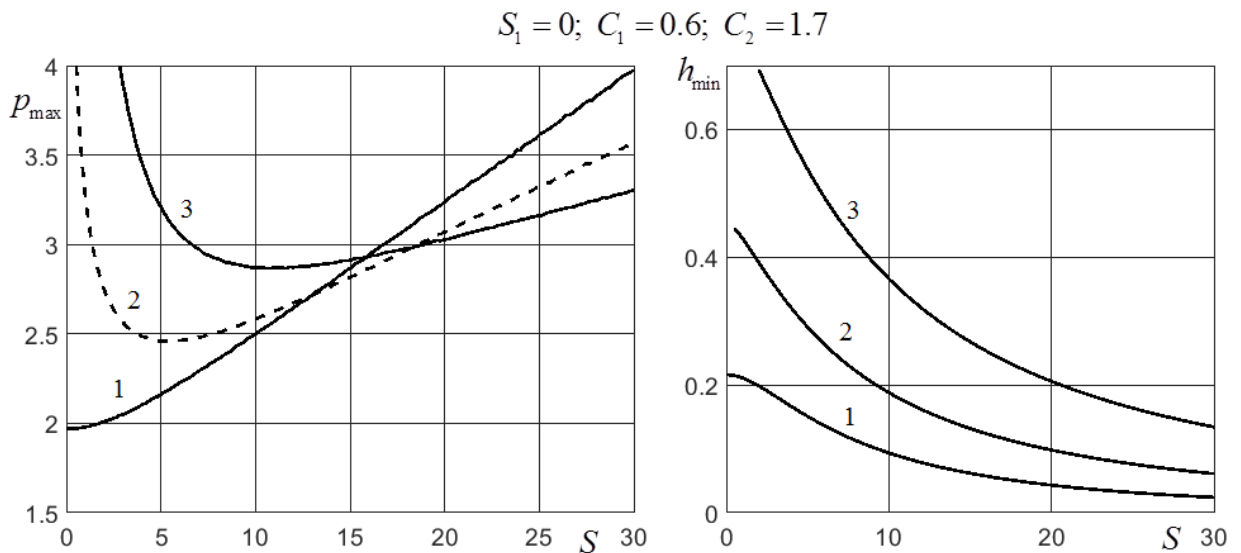


Рис.2.10. Зависимости $h_{\min}$ и $p_{\max}$ от S при $S_1 = 0$ и различных значениях параметра G .

Кривые 1 - $G = 0.25$, 2 - $G = 2$, 3 - $G = 5$

В результате с ростом значения параметра S (рис. 2.10) максимум давления сначала падает (снижение влияния роста вязкости смазки с ростом давления), а затем растет. Толщина смазочного слоя падает с ростом значения S при всех значениях параметра G . Это обусловлено понижением касательных напряжений, что затрудняет поступление смазочной жидкости в зазор.

Влияние скорости скольжения (параметра S_1) на толщину смазочного слоя и распределение давления в нем иллюстрируют результаты расчетов, приведенные на рис. 2.11 и рис. 2.12. Результаты получены при значениях параметров $S = 10$, $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$. На рис. 2.11 представлены графики функций $p_{\max}(S_1)$ и $h_{\min}(S_1)$. и при трех значениях параметра G : $G = 5$ (кривые 1), $G = 2$ (кривые 2) и $G = 0$ (кривые 3). На рис. 2. 12 представлены функции $p(x)$ и $h(x)$ при $G = 5$ и двух значениях параметра S_1 : $S_1 = 0$ (кривые 1) и $S_1 = 0.2$ (кривые 2).

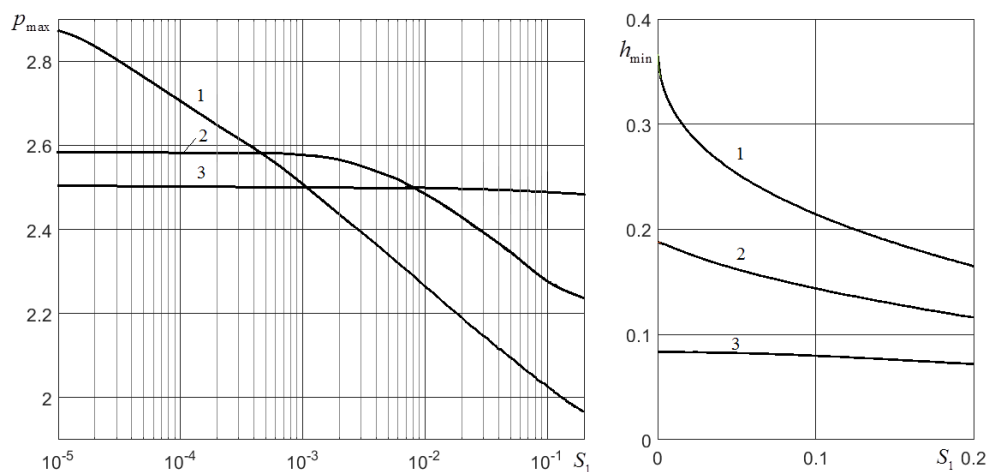


Рис. 2.11. Графики функций $p_{\max}(S_1)$ и $h_{\min}(S_1)$ при $S=10$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при трех значениях параметра G : $G=5$ (кривые 1), $G=2$ (кривые 2) и $G=0$ (кривые 3).

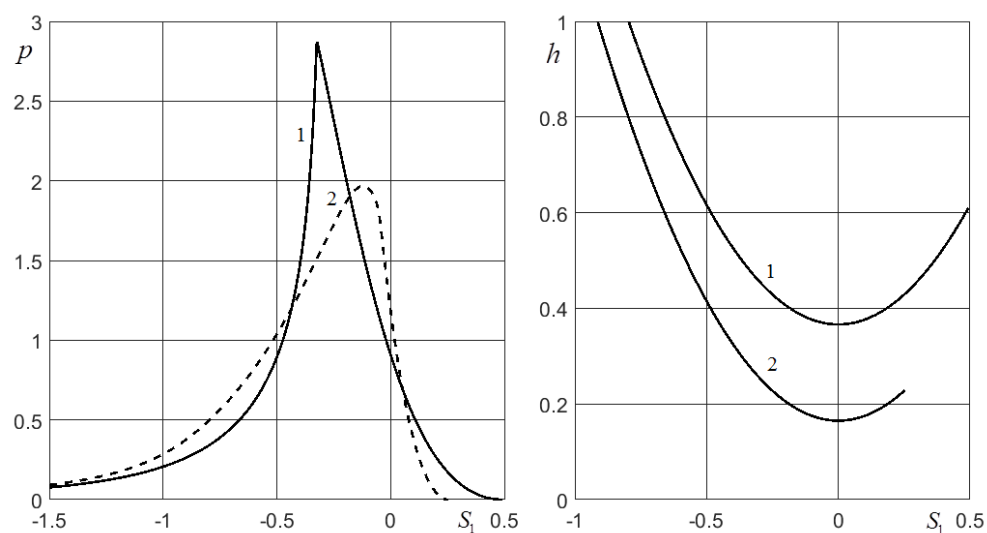


Рис. 2.12. Зависимости $p(x)$ и $h(x)$ при $S=10$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, $G=5$ и при двух значениях параметра S_1 : $S_1=0$ (кривые 1) и $S_1=0.2$ (кривые 2)

Скольжение приводит к понижению потока жидкости, увлекаемого в зазор поверхностями, что приводит к более медленному росту давления, понижению градиента давления при прочих равных условиях. Ухудшение условий генерации давления приводит к понижению толщины смазочного слоя для обеспечения необходимого противодействия внешним силам. Уменьшение толщина смазочного слоя, в свою очередь, приводит к повышению давления, развиваемого в смазочном слое. При этом повышение вязкости смазки с ростом давления усиливают указанные явления.

В результате при высоких значениях параметра G ($G=5$) минимальная толщина смазочного слоя и максимальное давление быстро падает с ростом значения параметра S_1 . При малых значениях параметра G влияние скольжения менее существенно. Характер изменения функции распределения давления и толщины смазочного слоя с ростом параметра скольжения S_1 при высоких значениях параметра G иллюстрирую графики, приведенные на рис. 2.12.

2.2. Контакт жестких тел с тонкими упругими покрытиями при наличии тонкого слоя вязкого смазочного материала

Рассмотрим схему контакта, изображенную на рис. 2.13. Два жестких цилиндра, покрытых тонкими упругими слоями, разделены тонким смазочным слоем, вращаются с разными угловыми скоростями и прижаты друг к другу силой W . Рассмотрим случай, когда механические свойства тонких упругих слоев одинаковы.

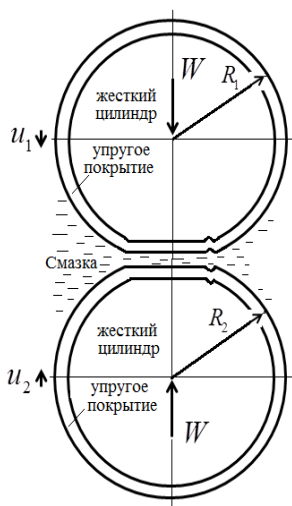


Рис. 2.13. Расчетная схема контакта жестких тел, покрытых тонкими упругими слоями

При наличии тонких упругих покрытий выражение для толщины смазочного слоя можно представить в виде [14]

$$\tilde{h}(x) = \tilde{h}_0 + \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{c}^2}{2R} + \frac{\Delta}{E'} \tilde{p} \quad (2.24)$$

где Δ - сумма толщин упругих слоев, E' - приведенный модуль упругости,

$E' = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} E$. Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$h = \frac{2R\tilde{h}}{b_L^2}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{b_L}, \quad b_L = \sqrt[3]{\frac{3WR\Delta}{2E'}}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_L}, \quad \tilde{p}_L = \frac{E'b_L^2}{2R\Delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{W^2 E'}{R\Delta} \right)^{1/3}, \quad c = \frac{\tilde{c}}{b_L}, \quad a = \frac{\tilde{a}}{b_L} \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует, что $\tilde{p}_L b_L = \frac{3}{4} W$. В безразмерных переменных уравнения и

условия принимают вид.

$$-\rho h^3 \exp(-Gp) \frac{3\beta ch(\beta) - 3sh(\beta)}{\beta^3} \sqrt{1 + \left[\frac{S \cdot S_1}{h} \frac{\beta}{sh(\beta)} \exp(Gp) \right]^2} \frac{dp}{dx} + \rho Vh = VH \quad (2.26)$$

$$h(x) = H + x^2 - c^2 + p \quad (2.27)$$

$$\rho = 1 + \frac{C_1 p}{1 + C_2 p} \quad (2.28)$$

$$p(a) = 0, \quad p(c) = 0 \quad (2.29)$$

$$\int_a^c p(x) dx = \frac{4}{3} \quad (2.30)$$

где $G = \alpha_p p_L$, $\beta = S \frac{h}{2} \frac{dp}{dx}$, $C_1 = \tilde{p}_L \tilde{C}_1$, $C_2 = \tilde{p}_L \tilde{C}_2$, $H = \frac{2R\Delta}{b_L^2}$

$$S = \frac{3W}{8R\tau_0}, \quad S_1 = \frac{1}{6} \frac{u_s}{u}, \quad V = \frac{64\mu_0 u R^2}{W b_L^2} = \frac{64\mu_0 u R^2}{W} \left(\frac{2E'}{3WR\Delta} \right)^{2/3} \quad (2.31)$$

Выражение для коэффициента трения и его составляющих в безразмерных переменных можно записать в виде (выражение f_s записано для случая ньютоновской смазки)

$$f_s = \frac{1}{4} \frac{U_s}{u} \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \bar{f}_s, \quad f_t = 3 \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \bar{f}_t, \quad f_r = 6 \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \bar{f}_r$$

$$f = \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \left(\frac{1}{4} \frac{U_s}{u} \bar{f}_s + 3(\bar{f}_t + 2\bar{f}_r) \right) \quad (2.32)$$

$$\bar{f}_s = \sqrt{V} \int_a^c \frac{\exp(Gp)}{h} dx, \quad \bar{f}_t = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_a^c \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx, \quad \bar{f}_r = -\frac{1}{\sqrt{V}} \int_a^c xp(x) dx$$

Отсутствие второго максимума давления. В работе [45] А. И. Петрусевичем было показано, что функция распределения давления в смазочном слое, разделяющим упругие цилиндрические тела, при высоких нагрузках имеет два максимума. Однако в решениях Д.С. Коднира УГД задач [33-36], в которых деформации упругих цилиндров он определял приближенно из решения задачи теории упругости для тонкого упругого слоя, функция распределения давления не имела второго максимума. Это обстоятельство послужило поводом для возникновения сомнений относительно существования второго максимума. С. П. Пулькин в работе [46] пытался доказать, что второго максимума давления в УГД задачах не существует. Однако в его доказательстве М.А. Галахов нашел ошибку [11].

Покажем, что решение системы уравнений (2.26), (2.27) не может иметь в области (a, c) более одного максимума. При этом будем предполагать, что функция $p(x)$ является дважды непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[a, c]$. Отметим, что для случая Ньютонской смазки при не учете изменения плотности смазочного материала с изменением давления ($\rho=1$) о данном обстоятельстве указывалось в работе [6].

Координата a задается с учетом указанных выше замечаний, и она отрицательна. Непрерывно-дифференцируемая функция $p(x)$ равна нулю в граничных точках $x = a$, $x = c$ и положительна в интервале (a, c) . Согласно теореме Ролля [71] в данном интервале имеется хотя бы одна точка, в которой производная давления равна нулю.

Пусть $dp/dx = 0$ в точке $x = x_*$, $(a < x_* < c)$. Перепишем уравнение (2.26) в виде

$$h^3 \Psi \left(p, \frac{dp}{dx} \right) \frac{dp}{dx} = Vh - \frac{1}{\rho} Vh \quad (2.33)$$

$$\text{где } \Psi \left(p, \frac{dp}{dx} \right) = \exp(-Gp) \frac{3\beta ch(\beta) - 3sh(\beta)}{\beta^3} \sqrt{1 + \left[\frac{S_1}{h} \frac{\beta}{sh(\beta)} \exp(Gp) \right]^2}$$

Дифференцируя равенство (2.33) по x , принимая $dp/dx = 0$ и учитывая (2.27), получаем равенство, справедливое в точке $x = x_*$:

$$h_*^3 \Psi(p_*, 0) \frac{d^2 p}{dx^2} \Big|_{x=x_*} = 2Vx_* \quad (2.34)$$

где $p_* = p(x_*)$, $h_* = h(x_*)$. При выводе (2.40) учитывалось, что

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dx} = 0 \text{ в точке } x = x_*.$$

Так как $\Psi(p_*, 0) > 0$, то из (2.34) следует, что

$$\frac{d^2 p}{dx^2} \Big|_{x=x_*} < 0 \text{ при } x_* < 0, \quad \frac{d^2 p}{dx^2} \Big|_{x=x_*} > 0 \text{ при } x_* > 0 \text{ и } \frac{d^2 p}{dx^2} \Big|_{x=x_*} = 0 \text{ при } x_* = 0 \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует, что если $x_* < 0$, то в точке $x = x_*$ функция $p(x)$ имеет максимум. Если $x_* > 0$, то в точке $x = x_*$ функция $p(x)$ имеет минимум. Если $x_* = 0$, то в этой точке равны нулю, как первая, так и вторая производная давления. Это означает, что в данной точке может быть максимум, или минимум или точка перегиба.

Докажем сначала, что должно быть $c \geq 0$. Докажем от противного. Предположим, что $a < c < 0$. В этом случае в точке $x = c$ первая производная функции $p(x)$ равна нулю, а вторая производная в соответствии с (2.35) отрицательна (условия (2.35) справедливы для любой точки, в которой первая производная давления равна нулю). Так как вторая производная давления непрерывна на отрезке $[a, c]$ и в точке $x = c$ отрицательна, то она отрицательна в некоторой левой окрестности точки $x = c$. Но тогда первая производная в этой окрестности должна уменьшаться. Уменьшаясь в этой окрестности, первая производная давления принимает нулевое значение в

точке $x = c$. Это означает, что первая производная давления принимает положительные значения в некоторой окрестности точки $x = c$.

Но если первая производная положительна, то сама функция $p(x)$ должна расти в некоторой левой окрестности точки $x = c$. Но этого быть не может, так как $p(x) > 0$ в интервале (a, c) и $p(c) = 0$, что означает, что в некоторой левой окрестности точки $x = c$ функция $p(x)$ должна падать.

Таким образом, координата выходной граничной точки смазочного слоя положительна, а точка максимума давления может принимать либо нулевое, либо отрицательное значение. Двух точек максимума быть не может, так как если бы их было две, или более, то между ними обязательно была бы точка минимума, координата которой принимает отрицательное значение и в которой вторая производная давления должна быть положительной, а этого быть не может в соответствии с (2.35).

Принимая в (2.27) значение координаты x равной координате точки максимума x_* , получаем

$$c^2 = x_*^2 + H \left(1 - \frac{1}{\rho_{\max}} \right) + p_{\max} > x_*^2$$

так как $p_{\max} = p(x_*) > 0$, $\rho_{\max} = \rho(p_{\max}) > 1$. Отсюда следует, что $x_* \in (-c, 0)$. Таким образом, если перемещение точки поверхности смазываемого деформируемого тела пропорционально приложенному в этой точке давлению, то функция распределения давления в смазочном слое $p(x)$ имеет единственный максимум, расположенный в интервале $(-c, 0)$, где $c > 0$ - координата выходной граничной точки смазочного слоя.

Предельные соотношения. Покажем, что в пределе при значении $V \rightarrow \infty$ решение задачи (2.26) - (2.30) стремится к решению ГД задачи смазки жестких тел. Для этого введем новые безразмерные переменные

$$\hat{h} = \frac{8}{3\pi} \frac{h}{V}, \quad \hat{x} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{x}{\sqrt{V}}, \quad \hat{p} = \frac{3\pi\sqrt{6\pi}}{32} \sqrt{V} p \quad (2.36)$$

В новых переменных уравнения и условия (2.26) – (2.30) принимают вид

$$-\hat{\rho}\hat{h}^3 \exp(-\hat{G}\hat{p}) \frac{3\hat{\beta}ch(\hat{\beta}) - 3sh(\hat{\beta})}{\hat{\beta}^3} \sqrt{1 + \left[\frac{\hat{S} \cdot S_1}{\hat{h}} \frac{\hat{\beta}}{sh(\hat{\beta})} \exp(\hat{G}\hat{p}) \right]^2} \frac{d\hat{p}}{d\hat{x}} + \hat{\rho}\hat{h} = \hat{H} \quad (2.37)$$

$$\hat{h}(\hat{x}) = \hat{H} + \hat{x}^2 - \hat{c}^2 + \frac{256}{9\pi^2 \sqrt{6\pi}} \frac{1}{V^{3/2}} \hat{p} \quad (2.38)$$

$$\hat{\rho} = 1 + \frac{\hat{C}_1 \hat{p}}{1 + \hat{C}_2 \hat{p}} \quad (2.39)$$

$$\hat{p}(\hat{a}) = 0, \quad \hat{p}(\hat{c}) = 0 \quad (2.40)$$

$$\int_{\hat{a}}^{\hat{c}} \hat{p}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{\pi}{2} \quad (2.41)$$

$$\text{где } \hat{H} = \frac{8}{3\pi} \frac{H}{V}, \quad \hat{G} = \frac{32}{3\pi \sqrt{6\pi}} \frac{1}{\sqrt{V}} G, \quad \hat{C}_1 = \frac{32}{3\pi \sqrt{6\pi}} \frac{1}{\sqrt{V}} C_1, \quad \hat{C}_2 = \frac{32}{3\pi \sqrt{6\pi}} \frac{1}{\sqrt{V}} C_2,$$

$$\hat{\beta} = \hat{S} \frac{\hat{h}}{2} \frac{d\hat{p}}{d\hat{x}}, \quad \hat{S} = \frac{W}{2\pi R \tau_0} \quad (2.42)$$

В пределе при $V \rightarrow \infty$ последний член в правой части (2.38) исчезает. При его отсутствии задача в переменных $\hat{x}, \hat{c}, \hat{h}, \hat{p}, \hat{H}, \hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{S}, \hat{S}_1$ становится точно такой же, как и задача (2.7) – (2.11) для жестких тел в переменных $x, c, h, p, H, G, C_1, C_2, S, S_1$. Это означает, что решение исходной задачи (2.26) – (2.30) в пределе при $V \rightarrow \infty$ переходит в решение задачи для жестких тел в переменных, определенных формулами (2.42).

Кроме того, из (2.42) следует, что при фиксированных значениях G, C_1, C_2 и при $V \rightarrow \infty$ выполняются соотношения

$$\hat{G} \rightarrow 0, \quad \hat{C}_1 \rightarrow 0, \quad \hat{C}_2 \rightarrow 0$$

Это означает, что в случае ньютоновской смазки ($S = 0$) если в задаче (2.37) – (2.41) зафиксировать значения параметров $\hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ и увеличивать значение параметра V , то в пределе при $V \rightarrow \infty$ должны выполняться соотношения

$$\hat{h}_m \rightarrow 0.1299, \quad \hat{p}_m \rightarrow 2.709, \quad \hat{H} \rightarrow 0.159 \text{ и } \hat{c} \rightarrow 0.171, \quad -\int_{\hat{a}}^{\hat{c}} \hat{x} \hat{p} d\hat{x} = \int_{\hat{a}}^{\hat{c}} \frac{\hat{h}}{2} \frac{d\hat{p}}{d\hat{x}} \rightarrow 0.752$$

Переходя к безразмерным переменным, соответствующим задаче (2.25) – (2.30), получаем, что при значении $S = 0$ должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{H}{V} \Big|_{\substack{G=const \\ C_1=const \\ C_2=const \\ S=0}} &= \frac{3\pi}{8} 0.159 = 0.187, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{h_m}{V} \Big|_{\substack{G=const \\ C_1=const \\ C_2=const \\ S=0}} = \frac{3\pi}{8} 0.1299 = 0.153 \\ \lim_{V \rightarrow \infty} p_m \sqrt{V} \Big|_{\substack{G=const \\ C_1=const \\ C_2=const \\ S=0}} &= 2.752 \frac{32}{3\pi \sqrt{6\pi}} = 2.152, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{V}} \Big|_{\substack{G=const \\ C_1=const \\ C_2=const \\ S=0}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} 0.171 = 0.186 \quad (2.43) \\ \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{V}} \int_a^c x p dx \Big|_{\substack{G=const \\ C_1=const \\ C_2=const \\ S=0}} &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{V}} \int_a^c \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx \Big|_{\substack{G=const \\ C_1=const \\ C_2=const \\ S=0}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} 0.752 = 0.693 \\ \lim_{V \rightarrow \infty} \sqrt{V} \int_a^c \frac{\exp(Gp) dx}{h} \Big|_{\substack{G=const \\ C_1=const \\ C_2=const \\ S=0}} &= \sqrt{\frac{8}{3\pi}} 5.590 = 5.15 \end{aligned}$$

Метод численного решения. Рассмотрим сначала смазку Ньютоновской жидкостью, вязкость которой изменяется с изменением давления по закону Баруса. Уравнение Рейнольдса (2.32) имеет вид

$$-\rho h^3 \exp(-G) \frac{dp}{dx} + \rho V h = V H \quad (2.44)$$

В результате получаем систему уравнений и условий (2.44), (2.27) – (2.30). Координата a задана. Координату c и безразмерную толщину смазочного слоя h находим итерациями. На каждой итерации при заданном значении c на отрезке $[a, c]$ вводим неравномерную сетку $\{x_k, k = 0, 1, \dots, N; x_0 = a; x_N = c\}$. Уравнение (2.44) заменяем конечно-разностными уравнениями

$$\rho_k h_{k-\frac{1}{2}}^3 [\exp(-Gp_k) - \exp(-Gp_{k-1})] = V G \left(H - \rho_k h_{k-\frac{1}{2}} \right) (x_k - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.45)$$

Уравнения (2.27), (2.28) в узле x_k записываем в виде

$$\rho_k = 1 + \frac{C_1 p_k}{1 + C_2 p_k} \quad (2.46)$$

$$h_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (h_{k-1} + h_k), \quad h_i = H + x_i^2 - c^2 + p_i \quad (2.47)$$

Условия (2.29), (2.30) запишем в виде

$$p_0 = 0, \quad p_N = 0, \quad \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) (x_k - x_{k-1}) = \frac{4}{3} \quad (2.48)$$

При заданном значении H итерациями находим такое значение C , чтобы выполнялись первые два условия (2.48). Для этого

1. Задаем $p_N = 0$. Решаем систему уравнений (2.45) - (2.47) при $k = N$ относительно p_{k-1} и h_{k-1} . Предварительно выражение (2.46) для ρ_k подставляем в (2.45).

2. Последовательно решаем систему уравнений (2.45) - (2.47) при $k = N-1, k = N-2, \dots, k=1$ относительно p_j и $h_j, j = N-2, \dots, 0$.

3. Если найденное значение p_0 удовлетворяет условию $|p_0| < \varepsilon_p$, где ε_p - заданная погрешность, то значение C , соответствующее имеющемуся на данный момент значению H , найдено. Если оказалось $|p_0| > \varepsilon_p$ то значение C увеличиваем при $p_0 < 0$, уменьшаем при $p_0 > 0$ и повторяем вычисления, начиная с пункта 1.

После определения значения C проверяем выполнение третьего условия (2.48) при заданном значении H , т. е. проверяем выполнение условия

$$\delta_H = \left| \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) (x_k - x_{k-1}) - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon_H$$

где ε_H - заданная погрешность. Если данное условие выполнено, то решение задачи найдено. Если оно не выполнено, то значение H увеличивается при $\delta_H > 0$ и уменьшается при $\delta_H < 0$ и вычисления продолжаются, начиная с поиска нового значения координаты C .

Решение системы уравнений (2.45) - (2.47) при заданном значении k производим следующим образом. Подставим выражение (2.46) в (2.45) и преобразуем полученное выражение к виду

$$\left(a_k + \frac{1}{2} y_k \right)^3 [1 - \exp(-G y_k)] = b_k G \left(\frac{H}{\rho_k} - a_k - \frac{1}{2} y_k \right) \quad (2.49)$$

где $a_k = H + \frac{1}{2}(x_k^2 + x_{k-1}^2) - c^2 + p_k$, $y_k = p_{k-1} - p_k$, $b_k = V \exp(Gp_k)(x_k - x_{k-1})$.

Решение уравнения (2.49) относительно y_k ищем в области $y_k > -2a_k$. Такое решение обеспечивает выполнение условия $h_{k-\frac{1}{2}} > 0$. Покажем, что уравнение (2.49) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $h_{k-\frac{1}{2}} > 0$ и условию $y_k \rightarrow 0$ при $b_k \rightarrow 0$. Последнее условие вытекает из соотношений

$$y_k = p_{k-1} - p_k = -\frac{dp}{dx}\bigg|_{x=x_k} (x_k - x_{k-1}) + o(x_k - x_{k-1}) \text{ и } b_k \sim (x_k - x_{k-1})$$

Рассмотрим сначала случай $G = 0$, когда изменением вязкости с изменением давления пренебрегаем. Уравнение (2.49) принимает вид

$$\left(a_k + \frac{1}{2}y_k\right)^3 y_k = b_k \left(\frac{H}{\rho_k} - a_k - \frac{1}{2}y_k\right) \quad (2.50)$$

Поиск нужного корня уравнения (2.50) рассмотрим отдельно для случая $a_k > 0$ и для случая $a_k \leq 0$. Пусть $a_k > 0$.

На рис. 2.14 приведены график функции

$$F_1(y) = \left(a_k + \frac{1}{2}y\right)^3 y \quad (2.51)$$

(кривая 1) и графики функций

$$F_2(y) = b_k \left(\frac{H}{\rho_k} - a_k - \frac{1}{2}y\right) \quad (2.52)$$

(кривые 2 и 3). Все кривые получены при значении $a_k = 3$.

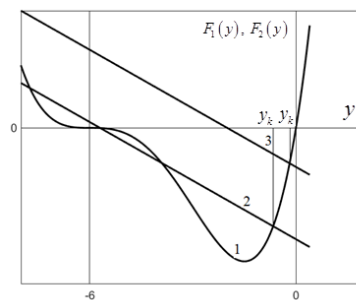


Рис. 2.14.

Функция $F_1(y)$ принимает нулевое значение при значении $y = -2a_k = -6$. Функции $F_2(y)$ принимают нулевые значения при значении $y = -2a_k + \frac{2H}{\rho_k} > -6$. При этом возможны два варианта. Графики функций могут пересекаться только в одной точке, расположенной справа от точки $(-6; 0)$ (прямая 3 на рис. 2.14), и кривые могут пересекаться в трех точках в этой области (прямая 1). В первом случае единственный корень уравнения (2.56) является искомым, во втором случае искомым корнем является корень с наименьшим модулем. Выбор корня во втором случае обусловлен следующим. При уменьшении шага $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ переменная $b_k > 0$ уменьшается. При этом прямая 2 на рис. 2.46 поворачивается против часовой стрелки с центром вращения в точке $\left(-2a_k + \frac{2H}{\rho_k}; 0\right)$. В результате точка y_k смещается вправо и в пределе при $\Delta x_k \rightarrow 0$ имеем $y_k \rightarrow 0$, что и должно иметь место. Другие корни при уменьшении шага не стремятся к нулю. Кроме того, при вращении прямой 2 против часовой стрелки, начиная с некоторого момента, прямая 2 будет пересекать кривую 1 только в одной точке справа от точки $(-6; 0)$.

Минимум функции имеет координату $y_m = -a_k/2$. Таким образом, искомый корень расположен на интервале $(y_m; 0)$. Он может быть найден методом деления отрезка (метод дихотомии).

Рассмотрим теперь случай $a_k \leq 0$. На рис. 2.15 приведены графики функций $F_1(y)$ (кривая 1) и $F_2(y)$ (кривая 2) при значении $a_k = -2$. Кривая 1 пересекает ось y в точке $y = -2a_k = 4$, а кривая 2 – в точке

$y = -2a_k + \frac{2H}{\rho_k} > 4$. Между этими точками расположен единственный корень уравнения (2.49), который является искомым.

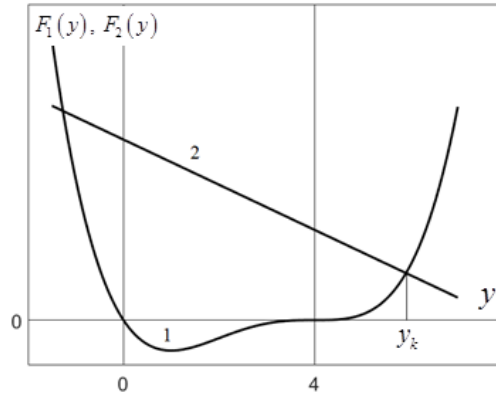


Рис. 2.15.

Рассмотрим теперь случай $G > 0$. В этом случае функция $F_1(y)$ и $F_2(y)$ имеют вид

$$F_1(y) = \left(a_k + \frac{1}{2}y\right)^3 [1 - \exp(-Gy)] \quad (2.53)$$

$$F_2(y) = b_k G \left(\frac{H}{\rho_k} - a_k - \frac{1}{2}y \right) \quad (2.54)$$

При значениях $a_k > 0$ поведение функции $F_1(y)$, имеющей вид (2.53), при изменении y от нуля до бесконечности со знаком минус аналогично поведению функции $F_1(y)$, имеющей вид (2.51). В обоих случаях $F_1(y) \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow -\infty$, $F_1(y) = 0$ в точке $y = -2a_k$, причем $y = -2a_k$ является точкой перегиба, $F_1(y)$ имеет единственный экстремум в виде минимума на отрезке $(-2a_k; 0)$ и $F_1(y) = 0$ в точке $y = 0$. При изменении y от нуля до положительной бесконечности в обоих случаях функция $F_1(y)$

растет от нуля до плюс бесконечности. Функция $F_2(y)$ отличается от (2.52) только константой G .

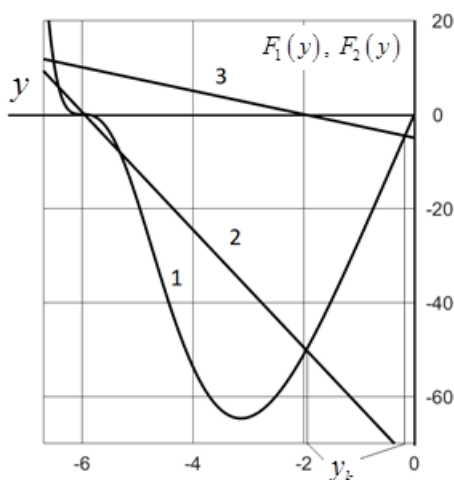


Рис. 2.16

На рис. 2.16 приведены кривые, аналогичные кривым, приведенным на рис. 2.15, полученные при $G=1$, $a_k=3$. Видно, что зависимости $F_1(y)$ и $F_2(y)$ при $G>0$ аналогичны этим же зависимостям при $G=0$.

Координата минимума функции $F_1(y)$ является решением уравнения

$$\exp(-Gy) - 1 = \frac{1}{6} G (2a_k + y) \quad (2.55)$$

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (2.61) имеет единственный корень y_m , расположенный в области $-2a_k < y < 0$. Этот корень может быть определен методом дихотомии. После определения этого корня корень уравнения (2.55), расположенный в области $y_m < y_k < 0$, также может быть определен методом дихотомии.

Несложно также доказать, что при $a_k < 0$ метод решения уравнения (2.49) в случае $G>0$ ничем не отличается от случая $G=0$.

Влияние упругого покрытия на толщину смазочного слоя, давление и коэффициент трения. Из определений (2.26) безразмерных переменных следует что

$$\frac{h}{V} = \frac{W}{32\mu_0 u R} \tilde{h}, \quad p\sqrt{V} = \frac{32}{3} \frac{R}{W} \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \tilde{p}, \quad \frac{c}{\sqrt{V}} = \frac{1}{8R} \sqrt{\frac{W}{\mu_0 u}} \tilde{c} \quad (2.56)$$

т. е. параметры $\frac{h}{V}$, $p\sqrt{V}$ и $\frac{c}{\sqrt{V}}$ не зависят от модуля упругости тонкого упругого слоя. С другой стороны, параметр $V \sim (E'/\Delta)^{\frac{2}{3}}$. Жестким телам соответствует $E' = \infty$ или $\Delta = 0$, и, соответственно, $V = \infty$. При уменьшении E' или увеличении толщины упругого слоя Δ значение V уменьшается, при этом деформации упругого слоя возрастают. Будем говорить, что в данном случае возрастает податливость упругого слоя.

Из сказанного следует, что влияние деформаций упругого слоя на размерные толщину смазочного слоя, давление в нем и ширину области, занимаемую смазочным слоем, иллюстрируют зависимости безразмерных параметров $\frac{h}{V}$, $p\sqrt{V}$ и $\frac{c}{\sqrt{V}}$ от параметра V .

На рис. 2.17 – 2.21 приведены графики функций $\frac{h_m}{V}$, $p_m\sqrt{V}$, $\frac{c}{\sqrt{V}}$, p_m , C от параметра V при различных значениях переменной G и при двух вариантах значений параметров C_1 и C_2 . В первом варианте $C = 0$ и $C_1 = 0$, т. е. не учитывается сжимаемость смазки, во втором варианте $C = 0.6$ и $C_1 = 1.7$. Этим значениям C и C_1 соответствует $\tilde{p}_L = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{W^2 E'}{R \Delta} \right)^{\frac{1}{3}} = 1 \Gamma \Pi a$.

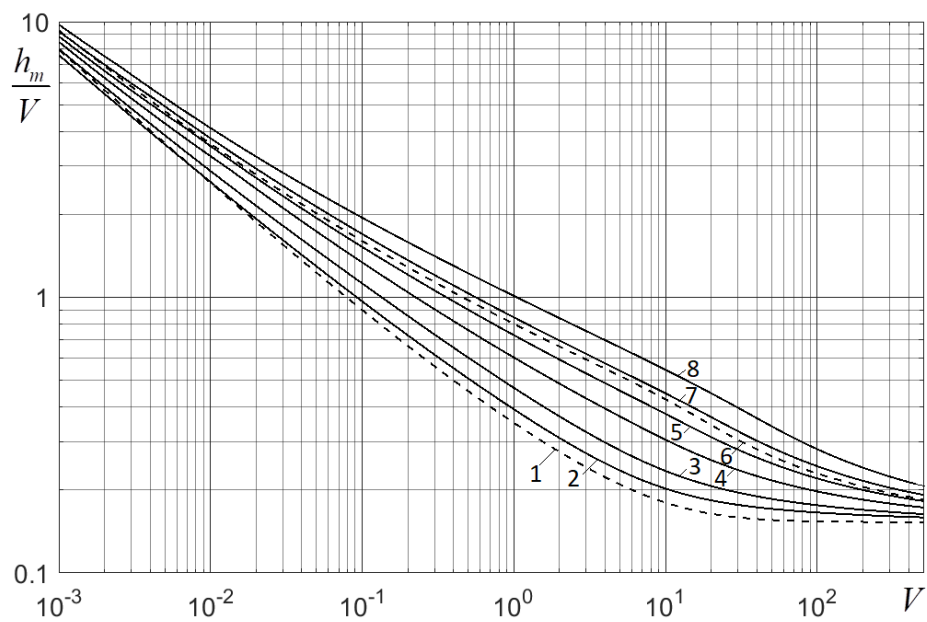


Рис. 2.17. Зависимости $\frac{h_m}{V}$ от V . Кривые 1 и 6 - $C_1 = C_2 = 0$; кривые 2, 3, 4, 5, 7 и 8 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривые 1 и 2 - $G = 0$; 3 - $G = 1$; 4 - $G = 3$; 5 - $G = 5$; 6 и 7 - $G = 7$; 8 - $G = 10$

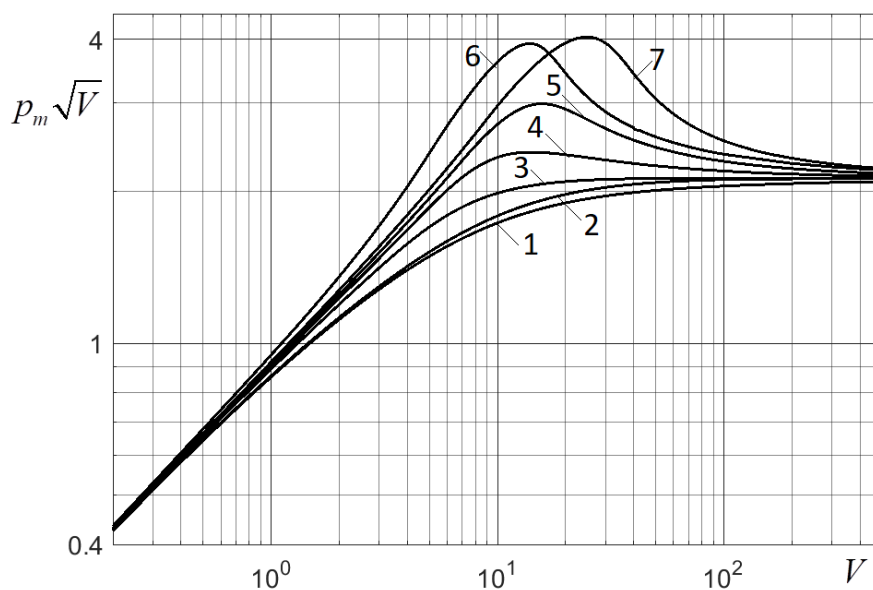


Рис. 2.18. Зависимости $p_m \sqrt{V}$ от V . Кривые 2 и 6 - $C_1 = C_2 = 0$; кривые 1, 3, 4, 5 и 7 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривые 1 и 2 - $G = 0$; 3 - $G = 3$; 4 - $G = 5$; 5 и 6 - $G = 7$; 7 - $G = 10$

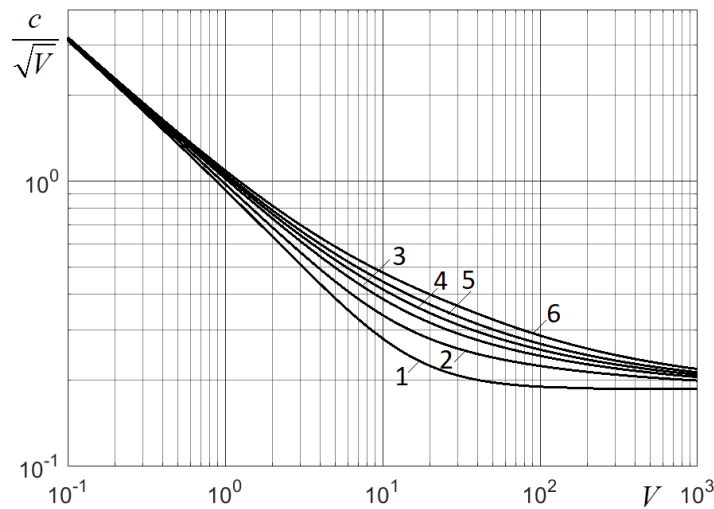


Рис. 2.19. Зависимости $\frac{c}{\sqrt{V}}$ от V . Кривая 1 - $C_1 = C_2 = 0$; кривые 2, 3, 4, 5 и 6 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривые 1 и 2 - $G = 0$; 3 - $G = 3$; 4 - $G = 5$; 5 - $G = 7$; 6 - $G = 10$

На рис. 2.17 – 2.19 видно, что при нулевых значениях параметров G, C_1 , C_2 и при значениях параметра $V \geq 100$ значения величин h_m/V , $p_m \sqrt{V}$ и $c/\sqrt{V}$ близки к предельным значениям этих величин в (2.49). При значениях $G > 0$ такая близость наступает при более высоких значениях параметра V .

Из графиков, приведенных на рис. 2.17, следует, что с ростом деформаций упругого слоя минимальная толщина смазочного слоя растет. При этом введением упругого слоя минимальная толщина смазочного слоя может быть повышена на два порядка и более.

Если не учитывать влияние давления на вязкость смазки, то с ростом деформаций максимальное давление падает (кривые 1 и 2 на рис. 2.20). При учете данного влияния максимальное давление сначала возрастает с ростом деформаций упругого слоя, а затем падает. При этом максимум давления наблюдается в области значений параметра V , в которой влияние роста вязкости смазки вследствие роста давления на рост минимальной толщины смазочного слоя максимально. В этой области функция распределения давления имеет более выраженный максимум.

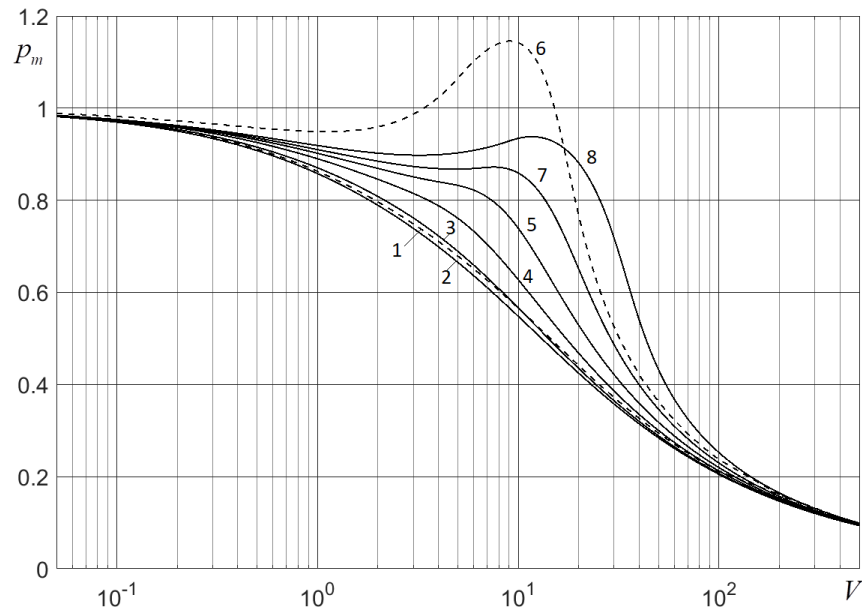


Рис. 2.20. Зависимости p_m от V . Кривые 1 и 6 - $C_1 = C_2 = 0$; кривые 2, 3, 4, 5, 7 и 8 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривые 1 и 2 - $G = 0$; 3 - $G = 1$; 4 - $G = 3$; 5 - $G = 5$; 6 и 7 - $G = 7$; 8 - $G = 10$

Из результатов расчетов, приведенных на рис. 2.21, следует, что с ростом деформаций упругого слоя выходная координата смазочного слоя сдвигается вправо, т. е. ширина смазочного слоя возрастает.

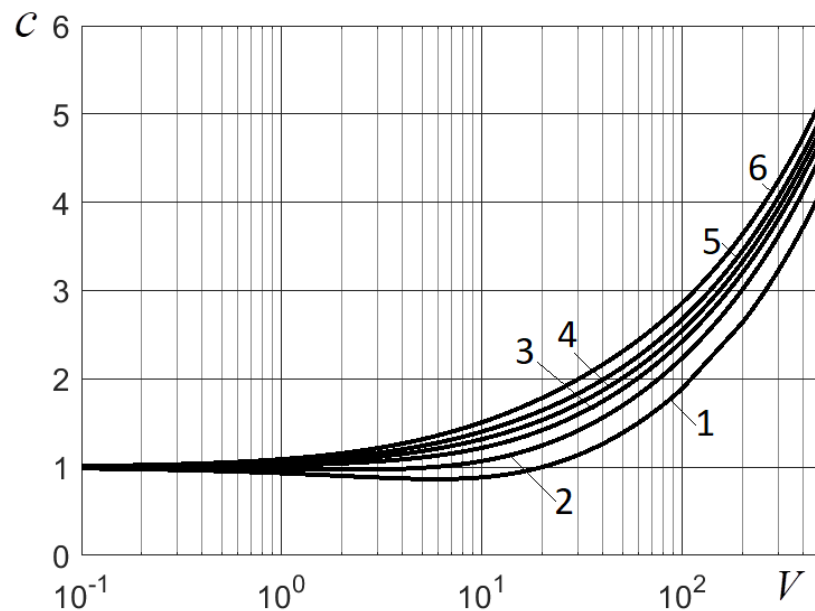


Рис. 2.21. Зависимости C от V . Кривая 1 - $C_1 = C_2 = 0$; кривые 2, 3, 4, 5 и 6 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривые 1 и 2 - $G = 0$; 3 - $G = 3$; 4 - $G = 5$; 5 - $G = 7$; 6 - $G = 10$.

Приведенные на рис. 2.17 – 2.21 кривые могут быть использованы для приближенных расчетов рассматриваемого смазываемого контакта. Из (2.56) следует, что

$$\tilde{h} = \frac{32\mu_0 u R}{W} \frac{h}{V}, \quad \tilde{p} = \frac{3}{32} \frac{W}{R} \sqrt{\frac{W}{\mu_0 u}} p \sqrt{V}, \quad \tilde{c} = 8R \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \frac{c}{\sqrt{V}} \quad (2.57)$$

где $\tilde{h}$, $\tilde{p}$ и $\tilde{c}$ - размерная толщина смазочного слоя, размерное давление в нем и размерная выходная координата смазочного слоя. Определив по графикам на рис. 2.17 – 2.21 значения параметров $\frac{h_m}{V}$, $\frac{p_m}{V}$ и $\frac{c}{\sqrt{V}}$ по формулам (2.57) можно определить значения $\tilde{h}_m$, $\tilde{p}_m$ и $\tilde{c}$.

Из результатов, приведенных на рис. 2.20, следует, что при значениях параметра $V < 0.1$ максимальное безразмерное давление $p_m \approx 1$. Учитывая это и (2.57) получаем, что при этих значениях V максимальное размерное давление

$$\tilde{p}_m \approx \frac{3}{32} \frac{W}{R} \sqrt{\frac{W}{\mu_0 u}} \sqrt{V}, \quad V < 0.1 \quad (2.58)$$

Из (2.58) следует, что чем меньше модуль упругости упругого слоя, т.е. чем выше его податливость, тем ниже максимальное давление в смазочном слое.

Из (2.43) и (2.56) следует, что при $V \gg 1$

$$\tilde{p}_m \approx 2.152 \cdot \frac{3}{32} \sqrt{\frac{W^3}{\mu_0 u R^2}} = 0.2 \frac{W}{R} \sqrt{\frac{W}{\mu_0 u}}, \quad V \gg 1 \quad (2.59)$$

Из (2.58) и (2.59) следует, что вследствие деформаций упругого слоя максимальное давление в смазочном слое может понижаться в десятки раз.

Например, при наличии упругого слоя и при значении $V = 0.001$

максимальное давление в смазочном слое $\tilde{p}_m \approx 0.00296 \frac{W}{R} \sqrt{\frac{W}{\mu_0 u}}$ (формула (2.58)), что более чем в 67 раз ниже, чем при отсутствии упругого слоя (формула (2.59)).

Из результатов, приведенных на рис. 2.17, следует, что при значении параметра $V = 0.001$ и при значении $G = 0$ минимальная толщина

смазочного слоя превышает минимальную толщину смазочного слоя в случае жестких тел более чем в 45 раз.

Приведем пример. Смазываемый контакт жестких тел при значениях параметров

$$\mu_0 = 0.005 \text{ Па} \cdot \text{сек} , W = 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}} , u = 1 \frac{\text{м}}{\text{сек}} , R = 0.01 \text{ м}$$

По формулам (2.21) находим для случая жестких тел при не учете изменения вязкости и плотности смазки с изменением давления

$$\tilde{h}_m = 2.45 \cdot 10^{-8} \text{ м} , \tilde{p}_m = 0.282 \text{ ГПа}$$

Покроем жесткие тела упругими покрытиями суммарной толщиной 0.1 мм и с приведенным модулем упругости 2.62 МПа. При тех же геометрических размерах, той же скорости и той же вязкости смазки по формуле (2.31) находим: $V = 0.001$. Такому значению V при не учете изменения вязкости и

плотности смазки с изменением давления численное решение дает $\frac{h}{V} = 7.895$

(используя рис. 2.17 можно определить, что данное значение близко к 8). По

формуле (2.31) находим $\tilde{h}_m = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Таким образом, введение упругого покрытия привело к увеличению минимальной толщины смазочного слоя в 51.4 раза. При этом получаем безразмерное максимальное давление $p_m = 1$.

По формулам (2.25) находим $\tilde{p}_m = \tilde{p}_L = 4.2 \text{ МПа}$. Таким образом, введение упругого покрытия увеличило минимальную толщину смазочного слоя в 51.4 раза и понизило максимальное давление в 67.1 раза.

Из результатов, приведенных на рис.2.20, следует, что влияние изменения вязкости смазки с изменением давления на минимальную толщину смазочного слоя наиболее существенно при средних значениях параметра V (при значениях $0.1 < V < 100$). Чем сильнее влияние деформаций, тем слабее влияние параметра G . Повышение минимальной толщины смазочного слоя за счет роста вязкости смазки может происходить

в несколько раз (на рис. 2.17 максимальный рост составляет примерно в 2.5 раза).

Из результатов, приведенных на рис. 2.17 и 2.20, следует также, что сжимаемость смазки слабо влияет на минимальную толщину смазочного слоя, но может оказывать существенное влияние на максимальное давление. Относительно минимальной толщины смазочного слоя это следует из сопоставления кривых 1 и 2, а также кривых 6 и 7 на рис. 2.17.

Кривые 1 и 2 получены при значении $G = 0$, кривые 6 и 7 – при значении $G = 7$. Пунктирные кривые получены при не учете сжимаемости смазки, а сплошные кривые – при учете.

Из приведенных результатов следует, что как при значении $G = 0$, так и при значении $G = 7$ сжимаемость смазки слабо влияет на минимальную толщину смазочного слоя во всем диапазоне изменения параметра V . Особенно слабое влияние сжимаемости смазки на минимальную толщину смазочного слоя при малых значениях параметра V (при значениях $V < 0.01$). При значениях $V > 0.01$ сжимаемость смазки приводит к слабому повышению минимальной толщины смазочного слоя.

При слабом влиянии сжимаемости смазки на минимальную толщину смазочного слоя она оказывает сильное влияние на максимальное давление. Это следует из сопоставления результатов расчетов, представленных на рис. 2.20 кривыми 6 и 7. Обе кривые получены при значении $G = 7$. Кривая 6 получена при не учете сжимаемости смазки, а кривая 7 – при учете. Видно, что сжимаемость смазки существенно понижает максимальное давление в некотором интервале изменения параметра V . Отметим, что влияние сжимаемости смазки на максимальное давление велико при тех значениях параметра V , при которых велико влияние роста вязкости смазки с ростом давления на минимальную толщину смазочного слоя.

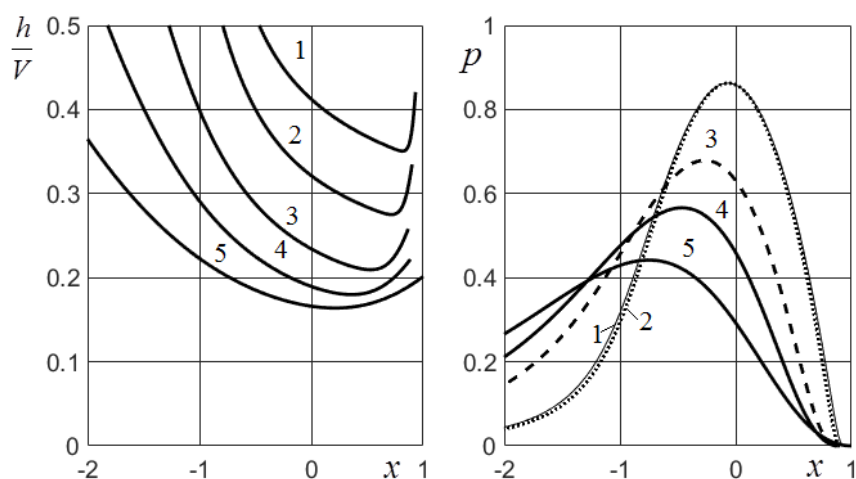


Рис. 2.22. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V = 1$; 2 - $V = 2$; 3 - $V = 5$; 4 - $V = 10$; 5 - $V = 20$

Характер изменения зависимостей $h(x)$ и $p(x)$ с изменением параметра V иллюстрируют кривые, приведенные на рис. 2.22 - 2.25, на которых приведены графики функций $h(x)/V$ и $p(x)$ при различных значениях параметра V .

На рис. 2.22 и рис. 2.23 кривые получены при не учете сжимаемости смазки и не учете роста вязкости смазки с ростом давления, а на рис. 2.24 и рис. 2.25 - с учетом указанных процессов.

Рассмотрим сначала изменение зависимостей $h(x)$ и $p(x)$ при изменении значения параметра V в случае $G = 0, C_1 = 0.6, C_2 = 1.7$.

На рис. 2.22 видно, что при высоком значении параметра V ($V = 20$, кривые 5) функции $h(x)$ и $p(x)$ имеют вид, близкий к виду, характерному для случая жестких тел. А именно, координата максимума давления близка к значению $-C$, а функция $h(x)$ близка к параболе.

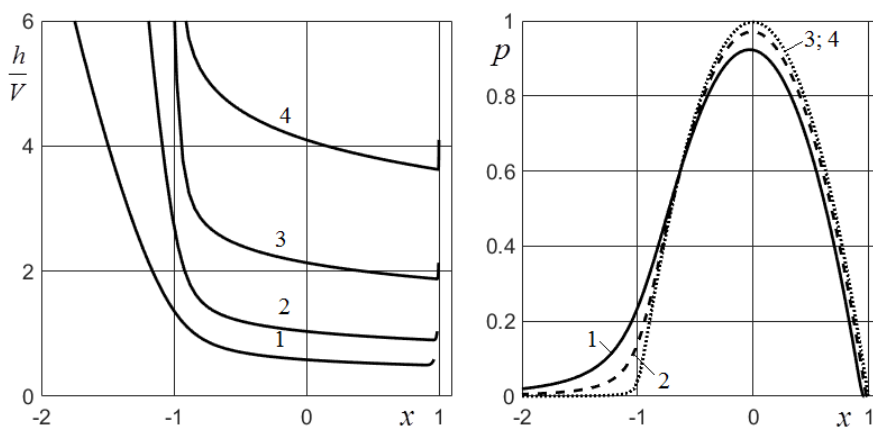


Рис. 2.23. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V = 0.4$; 2 - $V = 0.1$; 3 - $V = 0.02$; 4 - $V = 0.005$

При уменьшении значения параметра V максимум функции $p(x)$ повышается, а точка максимума смещается вправо. При этом график функции $p(x)$ становится более симметричным относительно линии действия нагрузки (оси $x = 0$). При значении $V = 0,005$ (кривые 4 на рис. 2.23) распределение давления почти во всей области контакта близко к распределению давления при сухом контакте тел, имеющему вид

$$p(x) = 1 - x^2 \quad (2.60)$$

Отличие от данного распределения визуально наблюдается только в небольшой окрестности точки $x = -1$. В окрестности точки $x = c$ производная давления должна измениться от высокого по модулю значения до нуля. При значении $V = 0.005$ значение $c = 0.9979$ и этот переход осуществляется, практически, в интервале $0.96 < x \leq c$.

При уменьшении значения параметра V график функции $h(x)/V$ смещается вверх, при этом на графике появляется и постепенно расширяется область, в которой функция $h(x)$ близка к линейной функции. В этой области зазор имеет форму клина. В конце этой области наблюдается быстрый рост функции $h(x)/V$.

Этот рост имеет следующую причину. При малых значениях параметра V давление в смазочном слое при небольшом удалении влево от точки $x = c$ близко к давлению при сухом контакте тел. Из (2.60) следует, что в этих точка производная давления при сухом контакте тел $dp/dx \approx -2$, то есть имеет высокое по модулю значение. Это приводит к тому, что отношение

$$\frac{H_L - h}{V_L} = -\frac{h^3}{V_L} \frac{dp}{dx}$$

также принимает высокое значение при небольшом удалении влево от точки $x = c$. Это и видно на рис. 2.23 (левая часть рисунка, кривая 4). В точке $x = c$ должно быть $h = H$, так как производная давления должна равняться нулю. Таким образом, рост толщины смазочного слоя в небольшой окрестности точки $x = c$ обеспечивает падения модуля производной давления до нуля.

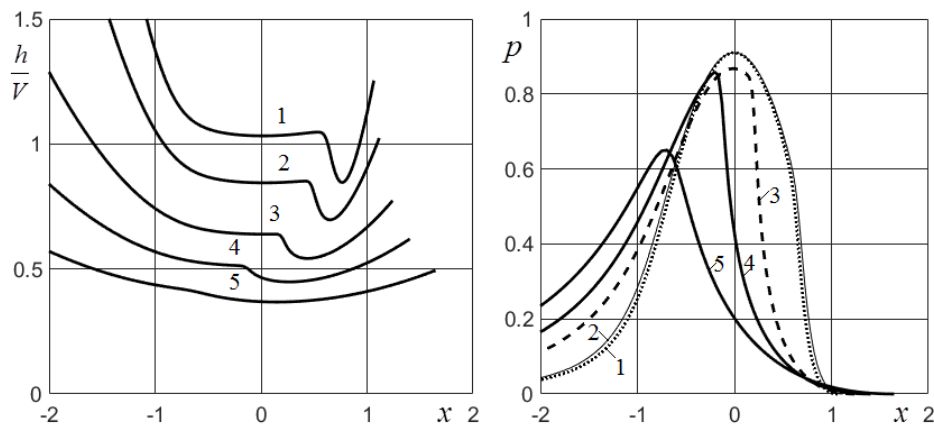


Рис. 2.24. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7, C_1=0.6, C_2=1.7$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V=1$; 2 - $V=2$; 3 - $V=5$; 4 - $V=10$; 5 - $V=20$

На рис. 2.24 и рис. 2.25 приведены аналогичные зависимости при учете изменения вязкости смазочного материала и плотности с изменением давления. Сравнивая результаты, приведенные на рис. 2.24, 2.25, с результатами, приведенными на рис. 2.22, 2.23, видим следующие отличия.

Повышение вязкости смазки с ростом давления приводит к повышению максимума давления при больших значениях параметра V .

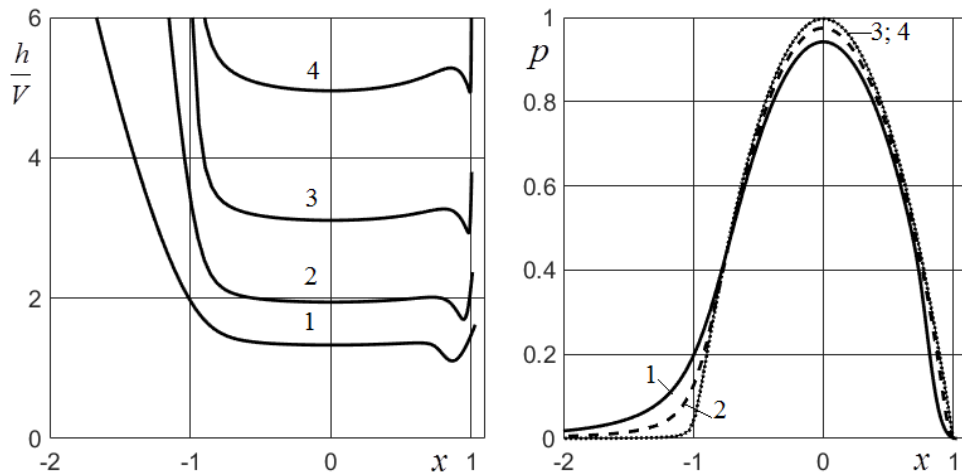


Рис. 2.25. Зависимости $\frac{h(x)}{V}$ и $p(x)$ при $G = 7, C_1 = 0.6, C_2 = 1.7$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V = 0.4$; 2 - $V = 0.1$; 3 - $V = 0.02$; 4 - $V = 0.005$

Это связано с тем, что при больших значениях параметра V свойства решения данной задачи близки к свойствам решения задачи для жестких тел, а ранее было показано, что в случае жестких тел рост вязкости смазки с ростом давления приводит к повышению максимального давления в смазочном слое.

Одновременно с повышением максимального давления наблюдается также существенный сдвиг по отношению к кривым для жестких тел влево и вверх правой точки перегиба функции $p(x)$, после которой модуль производной давления начинает падать до нуля. В данной точке перегиба давление и модуль производной давления принимают высокие значения. При движении к выходной границе смазочного слоя от этой точки перегиба давление сначала падает с высокой скоростью. Это приводит к быстрому падению множителя $\exp(-Gp)$ в выражении

$$\left| \frac{dp}{dx} \right| = \frac{H-h}{h^3} \exp(-Gp)$$

для модуля производной. Быстрое падение данного множителя сопровождается ростом разности $H-h$. Этот рост необходим для поддержания высокого значения модуля производной давления. После роста данной разности она убывает до нуля в точке $x=c$. В результате графике функции $\frac{1}{V}h(x)$ появляется впадина на выходе из зазора.

По мере убывания параметра V функция распределения давления приближается к распределению давления при сухом контакте тел, в котором точка перегиба в области $(0,c)$ отсутствует. Это приводит к тому, что правая точка перегиба функции $p(x)$ смещается вправо, по направлению к выходной границе смазочного слоя и опускается вниз. В результате впадина на графике функции $\frac{1}{V}h(x)$ уменьшается в размере, а ее глубина возрастает. Рост глубины впадины обусловлен ростом при уменьшении параметра V модуля производной давления в правой точке перегиба функции $p(x)$.

При малых значениях параметра V толщина смазочного слоя близка к постоянной толщине на широком интервале. Этот интервал распространяется примерно от левой точки перегиба функции $p(x)$ до ее правой точки перегиба.

Перейдем к рассмотрению влияния тонкого упругого слоя на коэффициент трения. Безразмерные коэффициенты трения $\bar{f}_s$, $\bar{f}_r$ и $\bar{f}_t$ определены в (2.32).

Из (2.32) и (2.43) следуют соотношения

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \bar{f}_s \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} = 5.15, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \bar{f}_t \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} = \lim_{V \rightarrow \infty} \bar{f}_r \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} = 0.693 \quad (2.61)$$

Нетрудно доказать, что в случае тонкого упругого слоя, так же как и в случае жестких тел, при значении $G = 0$ и при любых значениях параметров S, S_1, C_1 и C_2 выполняется равенство $\bar{f}_t = \bar{f}_r$. Действительно

$$\begin{aligned}\bar{f}_t &= \int_a^c \left(\frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \right) dx = \frac{1}{2} (hp) \Big|_a^c - \frac{1}{2} \int_a^c \left(p \frac{dh}{dx} \right) dx = -\frac{1}{2} \int_a^c \left(2x + \frac{dp}{dx} \right) p dx = \\ &= \bar{f}_r - \frac{1}{4} p^2 \Big|_a^c = \bar{f}_r\end{aligned}$$

Интегралы в выражениях $\bar{f}_r$ и $\bar{f}_t$ вычисляем после следующих преобразований

$$\begin{aligned}\int_a^c \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx &= \int_a^c \frac{h}{2} \frac{\rho V h - V H}{\rho h^3} \exp(Gp) dx = \frac{V}{2} \int_a^c \frac{\rho h - H}{\rho h^2} \exp(Gp) dx \\ \int_a^c x p(x) dx &= \frac{x^2}{2} p \Big|_a^c - \int_a^c \frac{x^2}{2} \frac{dp}{dx} dx = -\frac{V}{2} \int_a^c \frac{x^2 (\rho h - H)}{\rho h^3} \exp(Gp) dx\end{aligned}$$

На рис. 2.26, 2.27 приведены зависимости $\bar{f}_r(V)$, $\bar{f}_t(V)$ и $\bar{f}_s(V)$ при различных значениях параметров G, C_1 и C_2 .

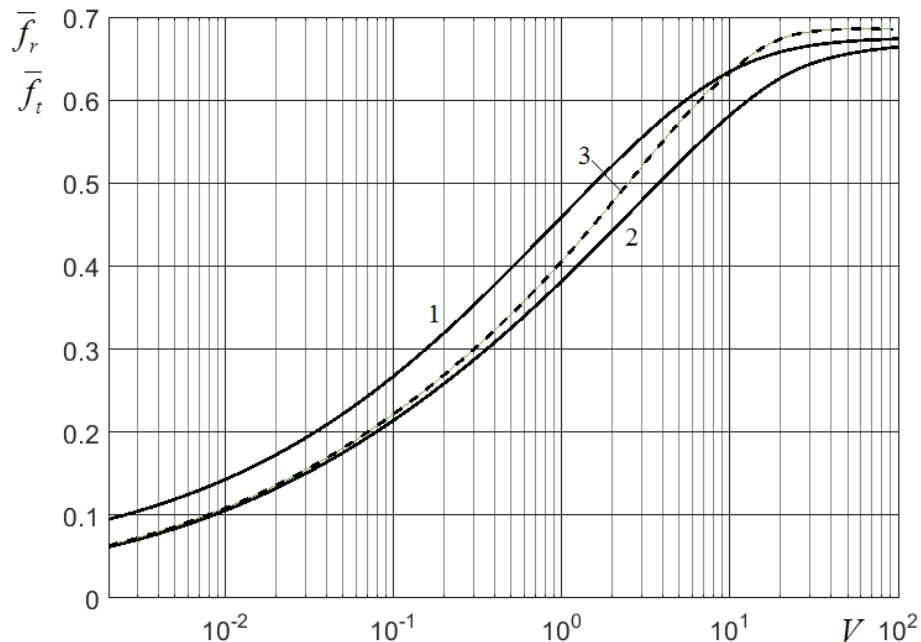


Рис. 2.26. Зависимости $\bar{f}_t(V)$. Кривая 1 - $G = C_1 = C_2 = 0$; 2 - $G = 7, C_1 = 0.6, C_2 = 1.7$; 3 - $G = 7, C_1 = C_2 = 0$

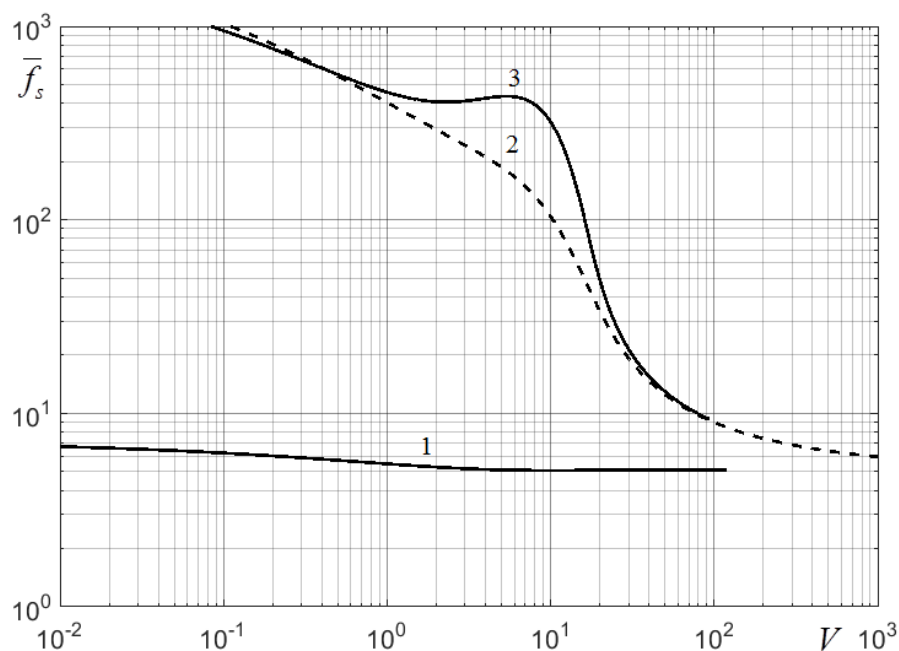


Рис. 2.27. Зависимости $\bar{f}_s(V)$. Кривая 1 - $G = C_1 = C_2 = 0$; 2 - $G = 7$, $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; 3 - $G = 3$, $C_1 = C_2 = 0$

Из приведенных зависимостей следует, что упругий слой способствует понижению коэффициента трения при качении. Чем выше податливость упругого слоя, тем ниже коэффициент трения качения. При повышении податливости упругого слоя толщина смазочного слоя растет и это способствует росту коэффициента трения качения. Однако при этом распределение давления становится более симметричным относительно линии действия нагрузки, а это способствует уменьшению коэффициента трения. Влияние второго эффекта является более сильным и в результате коэффициент трения падает.

Упругий слой способствует повышению коэффициента трения скольжения (рис. 2.27). При повышении податливости упругого слоя минимальная толщина смазочного слоя растет и это способствует понижению коэффициента трения скольжения. Однако при этом существенно расширяется область, в которой толщина смазочного слоя принимает значения, близкие к значению минимальной толщины. Смазочный

слой в области высокого давления стремится принять форму клина с малым углом наклона. А эти изменения приводят к росту коэффициента трения скольжения. С ростом параметра G происходит рост толщины смазочного слоя в области высокого давления, что способствует понижению коэффициента трения скольжения. Однако при этом существенно возрастает вязкость смазки и, соответственно, касательные напряжения. В результате всех указанных влияний получаем зависимости, изображенные на рис. 2.27

Приведенные на рис. 2.26 и 2.27 результаты расчетов при высоких значениях параметра V значения параметров $\bar{f}_s$ и $\bar{f}_t$ соответствуют предельным соотношениям (2.61).

2.3. Контакт упругих цилиндров при наличии тонкого слоя вязкого смазочного материала

Рассмотрим смазываемый контакт упругих цилиндров. Пусть цилиндры являются упругими, а смазка – ньютоновской (рис. 2.28).

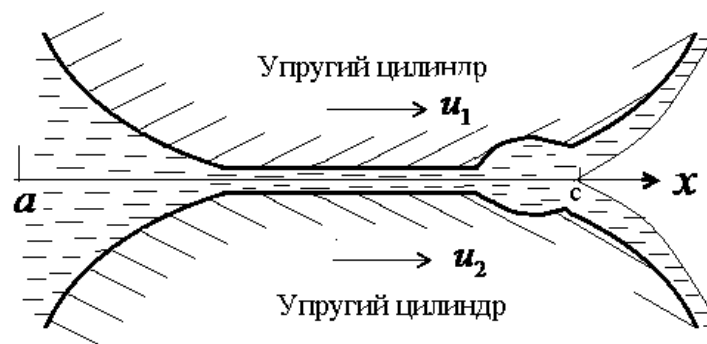


Рис. 2.28

Вместо уравнения (2.3) имеем уравнение

$$\tilde{h}(\tilde{x}) = \tilde{h}_0 + \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{c}^2}{2R} + \frac{4}{\pi E'} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{c}} \tilde{p}(\xi) \ln \left| \frac{\tilde{c} - \xi}{\xi - \tilde{x}} \right| d\xi \quad (2.62)$$

Задача состоит в совместном решении уравнений (2.2), (2.62), (2.4) при условиях (2.5), (2.6).

Приведем систему уравнений к безразмерному виду. Для этого отнесем давление к максимальному давлению $p_g = \sqrt{\frac{WE'}{2\pi R}}$, при сухом контакте тел, рассчитываемому по теории Герца, линейные размеры – к полуширине контакта $b_g = \sqrt{\frac{8WR}{\pi E'}}$ при сухом контакте тел, плотность смазочного материала – к ρ_0 . Толщину смазочного слоя отнесем к $b_g^2/2R$. В безразмерных переменных основные уравнения и условия запишутся в

$$-\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} + V\rho h = VH \quad (2.63)$$

$$h(x) = H + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(\xi) \ln \frac{c-\xi}{|\xi-x|} d\xi \quad (2.64)$$

$$\rho = 1 + C_1 p / (1 + C_2 p), \quad \mu = \exp(Gp) \quad (2.65)$$

$$p(a) = 0, \quad p(c) = 0, \quad \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=c} = 0, \quad \int_a^c p(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2} \quad (2.66)$$

$$\text{где } C_1 = \tilde{C}_1 p_g, \quad C_2 = \tilde{C}_2 p_g, \quad G = \alpha p_g, \quad V = 48 \frac{\mu_0 u R^2}{b_g^3 p_g} = \frac{3\pi^2 \mu_0 u R' E'}{W^2}, \quad H = \frac{2Rh_0}{b_g^2} \quad (2.67)$$

Уравнения (2.63)-(2.65) совместно с условиями (2.66) однозначно определяют значения параметров c, H и функции $h(x), p(x)$, если заданы значения параметров V, a, C_1, C_2, G .

Предельные свойства решения задачи. Покажем, что при $V \rightarrow \infty$ решение задачи стремится к решению задачи теории смазки жестких тел. Для этого перейдем к безразмерным переменным $\hat{x}, \hat{h}$ и $\hat{p}$ по формулам

$$\hat{h} = \frac{h}{V}, \quad \hat{x} = \frac{x}{\sqrt{V}}, \quad \hat{p} = p\sqrt{V}. \quad (2.68)$$

В новых переменных задач принимает вид

$$-\hat{\rho} \hat{h}^3 \exp(-\hat{G}) \frac{d\hat{p}}{d\hat{x}} + \hat{\rho} \hat{h} = \hat{H} \quad (2.69)$$

$$\hat{h}(\hat{x}) = \hat{H} + \hat{x}^2 - \hat{c}^2 + \frac{2}{\pi V} \int_{\hat{a}}^{\hat{c}} \ln \left| \frac{\hat{c} - \xi}{\xi - \hat{x}} \right| \hat{p}(\xi) d\xi \quad (2.70)$$

$$\hat{\rho} = 1 + \frac{\hat{C}_1 \hat{p}}{1 + \hat{C}_2 \hat{p}} \quad (2.71)$$

$$\hat{p}(\hat{a}) = 0, \quad \hat{p}(\hat{c}) = 0 \quad (2.72)$$

$$\int_{\hat{a}}^{\hat{c}} \hat{p}(\hat{x}) d\hat{x} = \frac{\pi}{2} \quad (2.73)$$

$$\text{где } \hat{H} = \frac{H}{V}, \quad \hat{G} = \frac{1}{\sqrt{V}} G, \quad \hat{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{V}} C_1, \quad \hat{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{V}} C_2 \quad (2.74)$$

При больших значениях параметра V последний член в правой части (2.71) мал. При его отсутствии задача в переменных $\hat{x}, \hat{c}, \hat{h}, \hat{p}, \hat{H}, \hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2$ становится точно такой же, как и задача для жестких тел, смазываемых ньютоновской жидкостью в переменных $x, c, h, p, H, G, C_1, C_2$ в разделе 2.1.5. Это означает, что при больших значениях параметра V зависимости $\hat{h}_m(\hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2)$, $\hat{p}_m(\hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2)$, $\hat{H}(\hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2)$ и $\hat{c}(\hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2)$ близки к соответствующим зависимостям для случая смазки жестких тел.

Учитывая это, получаем, что в пределе $V \rightarrow \infty$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{H}{V} \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const}}} &= 0.159, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{h_m}{V} \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const}}} = 0.1299 \\ \lim_{V \rightarrow \infty} p_m \sqrt{V} \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const}}} &= 2.71, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{V}} \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const}}} = 0.171 \\ \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{V}} \int_a^c x p dx \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{V}} \int_a^{\hat{c}} \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} = 0.752 \\ \lim_{V \rightarrow \infty} \sqrt{V} \int_a^c \frac{\exp(Gp) dx}{h} \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} &= 5.59 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Чтобы получить близкие к точному решению безразмерные минимальную толщину смазочного слоя и максимальное давление при больших значениях параметра V необходимо выполнить следующие операции:

1. Задать, или определить по формулам (2.67) параметры G, C_1, C_2, V ;
2. По формулам (2.74) определить параметры $\hat{G}, \hat{C}_1, \hat{C}_2$;
3. Решить задачу для жестких тел при параметрах $G = \hat{G}, C_1 = \hat{C}_1, C_2 = \hat{C}_2$;
4. В полученном решении минимальную толщину смазочного слоя обозначить $\hat{h}_m$, а максимальное давление обозначить $\hat{p}_m$;
5. Используя соотношения (2.68) перейти от $\hat{h}_m$ к h_m и от $\hat{p}_m$ к p_m .

Приведем пример. Пусть при заданных размерных переменных значения безразмерных параметров получились следующими:

$G = 8; C_1 = 0.6; C_2 = 1.7; V = 100$. По формулам (2.74) находим: $\hat{G} = 0.8$, $\hat{C}_1 = 0.06$, $\hat{C}_2 = 0.17$. Решаем задачу для жестких тел при значениях параметров $G = 0.8; C_1 = 0.06; C_2 = 0.17$. Получаем $\hat{h}_m = 0.243$, $\hat{p}_m = 3.381$.

Используя (2.68), получаем: $h_m = 24.3$, $p_m = 0.338$. Решение задачи с учетом деформации контактирующих тел дает $h_m = 24.7$, $p_m = 0.311$. Таким образом, погрешность по минимальной толщине смазочного слоя составила менее 2%, а по максимальному давлению – менее 8%.

Метод численного решения системы уравнений. Система конечно-разностных уравнений в данном случае отличается от системы уравнений предыдущего раздела только уравнением (2.47), которое в данном случае можно записать в виде

$$h_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(h_{k-1} + h_k), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.76)$$

$$h_i = H + x_i^2 - c^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{N-1} p_j [g_{j,i} - g_{j,N}], \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.77)$$

$$g_{j,i} = g_j(x_i), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.78)$$

$$g_j(x) = A_j^1(x) + A_j^2(x) + B_j^1(x) + B_j^2(x), \quad j = 1, \dots, N-1$$

$$A_j^1(x) = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} [F_2(x_j - x) - F_2(x_{j-1} - x)]$$

$$A_j^2(x) = \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \left[F_1(x_j - x) - F_1(x_{j-1} - x) \right]$$

$$B_j^1(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \left[F_1(x_{j+1} - x) - F_1(x_j - x) \right]$$

$$B_j^2(x) = -\frac{1}{x_{j+1} - x_j} \left[F_2(x_{j+1} - x) - F_2(x_j - x) \right]$$

$$F_1(x) = x(\ln|x| - 1), \quad F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \right)$$

Подставим (2.76) и (2.77) в (2.46) и преобразуем полученное уравнение к виду

$$(a_k + \delta_k y_k)^3 [1 - \exp(-G y_k)] = b_k G \left(\frac{H}{\rho_k} - a_k - y_k \delta_k \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2.79)$$

где $\delta_k = \frac{1}{\pi} g_k(x_{k-1})$, $y_k = p_k - p_{k-1}$

$$a_k = \frac{1}{2} \left(h_k + H + x_{k-1}^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{N-1} p_j g_j(c) \right) - \frac{1}{\pi} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq (k-1)}}^{N-1} p_j g_j(x_{k-1}) + p_k g_{k-1}(x_{k-1}) \right)$$

Метод решение системы уравнений данной задачи принципиально не отличается от методы решения системы уравнений предыдущей задачи.

Влияние объемных упругих свойств на характеристики смазываемого контакта. На рис. 2.29-2.33 приведены зависимости, аналогичные зависимостям, приведенным на рис. 2.25 – 2.29. На рис. 2.29 видно, что при $G = C_1 = C_2 = 0$ и при $V > 200$ значение $h_m/V \approx 0.13$, то есть близко к предельному значению в (2.75). На рис. 2.32, 2.33 видно, что при тех же значениях параметров G, C_1, C_2 и V имеют место соотношения $p_m \sqrt{V} \approx 2.71$, $c/\sqrt{V} \approx 0.171$, что также соответствует (2.75).

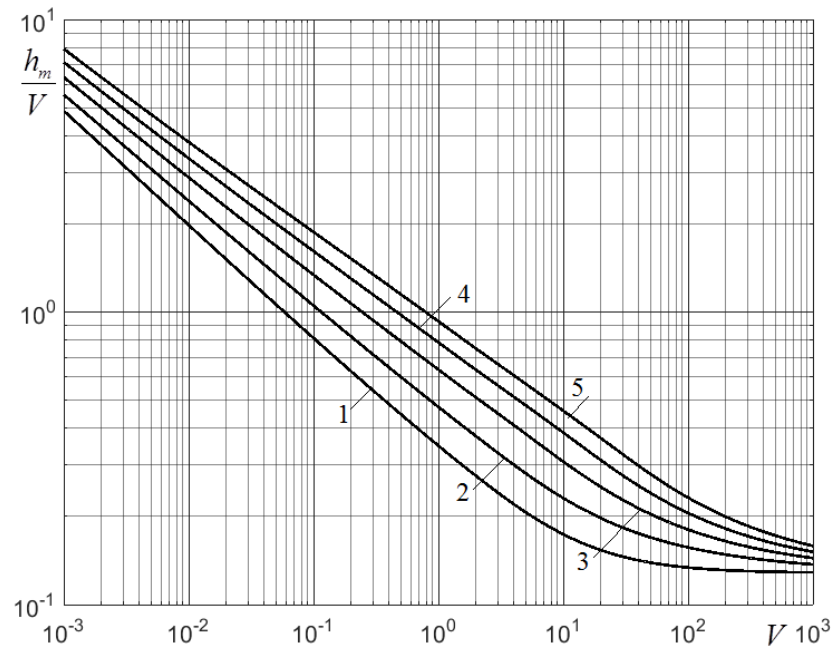


Рис. 2.29. Зависимости $\frac{h_m}{V}$ от V . Кривая 1 - $C_1 = C_2 = G = 0$; кривые 2, 3, 4 и 5 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривая 2 - $G = 1$; 3 - $G = 3$; 4 - $G = 5$; 5 - $G = 7$

Приведенные на рис. 2.29 результаты расчетов могут быть использованы для оценки минимальной толщины смазочного слоя в широком диапазоне нагрузок.

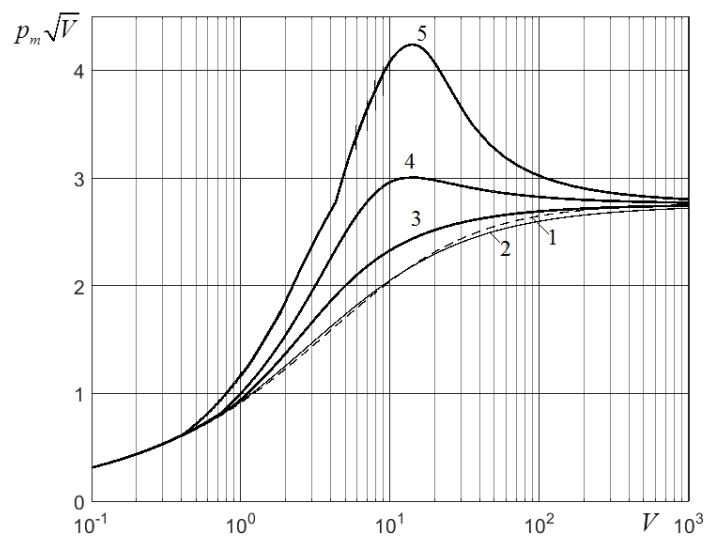


Рис. 2.30. Зависимости $p_m \sqrt{V}$ от V . Кривая 1 - $C_1 = C_2 = G = 0$; кривые 2, 3, 4 и 5 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривая 2 - $G = 1$; 3 - $G = 3$; 4 - $G = 5$; 5 - $G = 7$

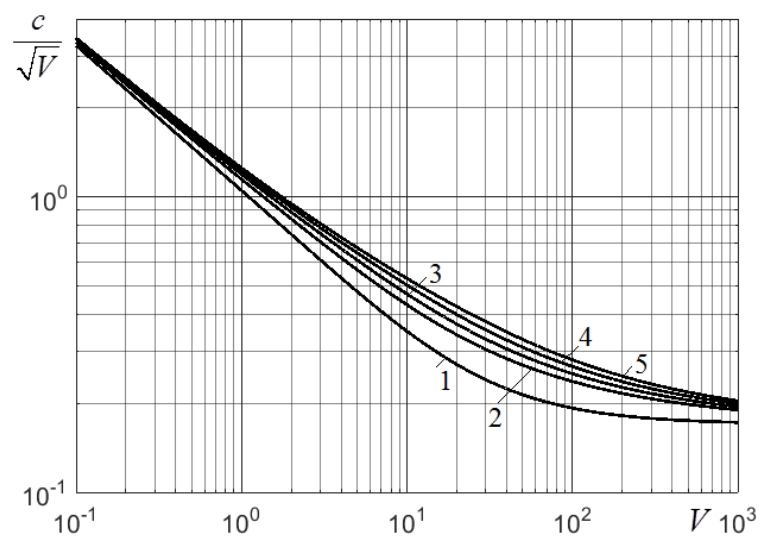


Рис. 2.31. Зависимости $\frac{c}{\sqrt{V}}$ от V . Кривая 1 - $C_1 = C_2 = G = 0$; кривые 2, 3, 4 и 5 -

$C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривая 2 - $G = 1$; 3 - $G = 3$; 4 - $G = 5$; 5 - $G = 7$

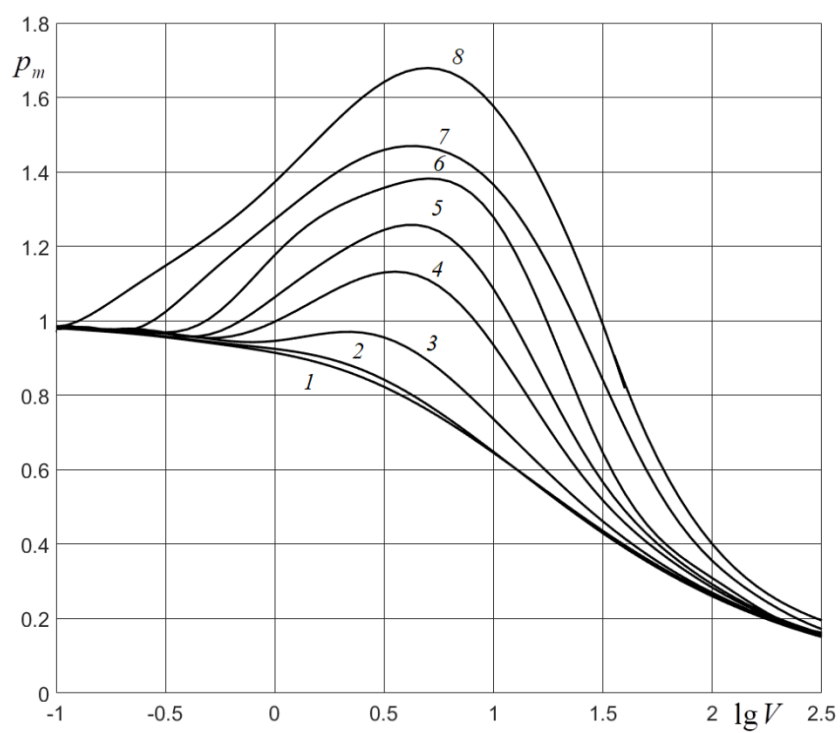


Рис. 2.32. Зависимости p_m от V . Кривая 1 - $C_1 = C_2 = G = 0$; кривые 2 - 8 $C_1 = 0.6$,

$C_2 = 1.7$; кривая 2 - $G = 1$; 3 - $G = 2$; 4 - $G = 4.5$; 5 - $G = 6$, 6 - $G = 7$, 7 - $G = 10$, 8 - $G = 20$

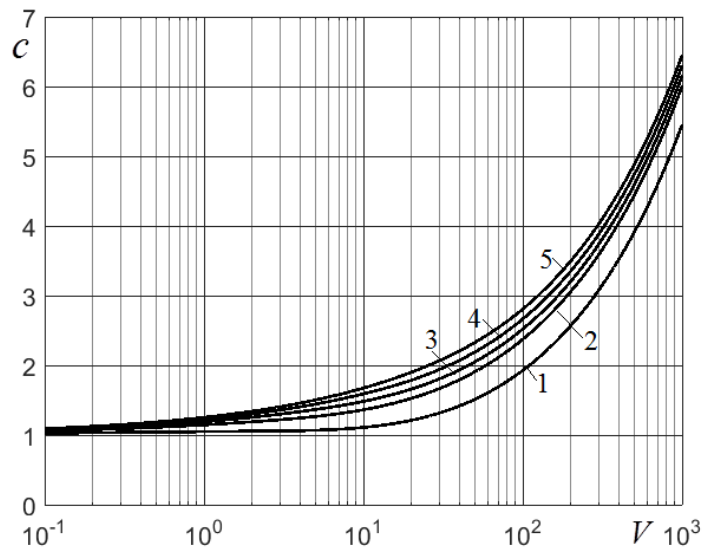


Рис. 2.33. Зависимости C от V . Кривая 1 - $C_1 = C_2 = G = 0$; кривые 2, 3, 4 и 5 - $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$; кривая 2 - $G = 1$; 3 - $G = 3$; 4 - $G = 5$; 5 - $G = 7$

Результаты расчетов, приведенные на рис. 2.29 – 2.33, показывают, что характер изменения переменных h_m , p_m и C с изменением V в данном случае такой же, как и в случае тонкого упругого слоя. Однако значение переменной p_m , в отличие от случая контакта жестких цилиндров с тонкими упругими слоями может значительно превышать единицу.

Из результатов расчетов, приведенных на рис. 2.32, следует, что при выполнении условия $\lg V < -0.9$ (или $\mu_0 u R E' / W^2 < 0.0042$) давление в смазочном слое близко к максимальному значению, как при отсутствии смазки (давление по Герцу). Кроме того, при выполнении условий $0.5 < \lg V < 0.85$, $G > 17$ (или $0.1 < \mu_0 u R E' / W^2 < 0.24$, $\alpha_p p_g > 17$) давление в смазочном слое выше давления по Герцу более чем в 1.6 раза.

Рассмотрим, как изменяется характер зависимостей $h(x)$ и $p(x)$ с изменением параметра V .

Рассмотрим сначала эти зависимости при неучете изменения вязкости и плотности смазки с изменением давления, то есть при значениях

$G = C_1 = C_2 = 0$. На рис. 2.34 приведены зависимости $h(x)$ и $p(x)$ при различных значениях параметра V .

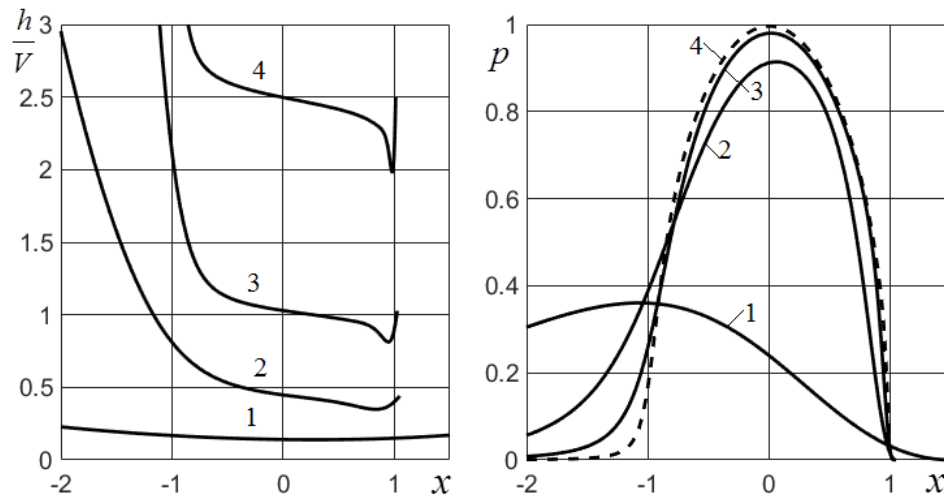


Рис. 2.34. Зависимости h/V и p от x при $G = C_1 = C_2 = 0$. Кривые 1 - $V = 50$, 2 - $V = 1$, 3 - $V = 0.1$, 4 - $V = 0.01$

Кривым 1 соответствует значение $V = 50$. При данном значении параметра V зависимости $h(x)$ и $p(x)$ имеют вид, характерный для случая жестких тел. А именно, функция $h(x)$ имеет вид, близкий к параболе, а максимум давления имеет координату, близкую к $x = -C$. Отметим, что в случае смазываемого контакта жестких тел максимум давления имеет координату $x = -C$.

Кривым 2 на рис. 2.34 соответствует значение $V = 1$. Из сопоставления кривых 1 и 2 на левой части рис.2 видно, как упругость тел изменила форму зазора. А именно, в зазоре появился достаточно широкий линейный участок. При этом минимальная размерная толщина смазочного слоя, пропорциональная h/V , существенно возросла.

Из результатов, приведенных на правой части рис. 2.34, следует, что упругость привела к смещению максимума давления вправо и его повышению. При этом крутизна функции $p(x)$ повышается как левее линии

действия нагрузки, так и правее ее. В результате во входной зоне смазочного слоя давление существенно понижается.

При значении $V = 0.1$ (кривые 3 на рис. 2.34) линейный участок зазора и наклон участка к оси x сохраняются. Однако в конце линейного участка появляется достаточно глубокая впадина. Появление этой впадины вызвано следующими причинами.

По мере уменьшения параметра V распределение давления в большей части зазора приближается к распределению, имеющему место при сухом контакте тел, то есть к распределению вида

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Производная $\frac{dp}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ быстро падает в окрестности точки $x=1$ (модуль производной быстро растет). Из уравнения (2.63) следует, что такое изменение производной давления ведет к быстрому падению толщины смазочного слоя (быстрому росту разности $H-h$). Именно быстрый рост модуля $|dp/dx|$ приводит к быстрому падению толщины смазочного слоя в конце линейного участка.

Однако на границе $x = c$ должно выполняться условие равенства нулю производной давления (условие (2.66)), то есть, должно быть $h(c) = H$. В результате после падения толщины смазочного слоя наблюдается ее быстрый рост до значения H . При этом на графике функции $h(x)$ в окрестности выходной граничной точки при малых значениях параметра V появляется впадина. Глубина впадины возрастает при уменьшении V , а ширина впадины уменьшается. Отметим, что в случае тонкого упругого вкладыша модуль производной давления в окрестности выходной точки области контакта относительно невелик, поэтому впадины на графике $h(x)$ при $G = C_1 = C_2 = 0$ не наблюдается.

Из результатов, приведенных рис. 2.34, следует, что при уменьшении значения параметра V максимум давления растет, а распределение давления стремится к распределению, имеющему место при сухом контакте тел. Зависимость $p_{\max} = \max_{x \in [a, c]} p(x)$ от параметра V при значениях параметров $G = C_1 = C_2 = 0$ является монотонной.

Рассмотрим теперь изменение функций $h(x)$ и $p(x)$ с изменением параметра V при учете изменения вязкости и плотности смазки с изменением давления. На рис. 2.35 – 2.36 приведены зависимости $h(x)$ и $p(x)$, полученные при значениях параметров $G = 7$, $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$ и при различных значениях параметра V . На рис. 2.35 приведены кривые, полученные при высоких значениях параметра V , а на рис. 2.36 – при низких значениях этого параметра.

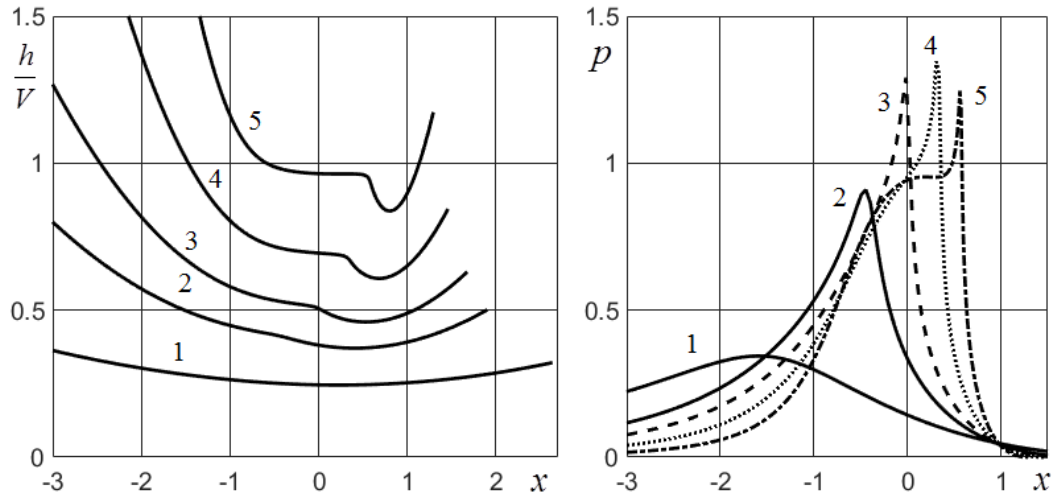


Рис. 2.35. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V=80$, 2 - $V=20$, 3 - $V=10$, 4 - $V=4$, 5 - $V=1.4$

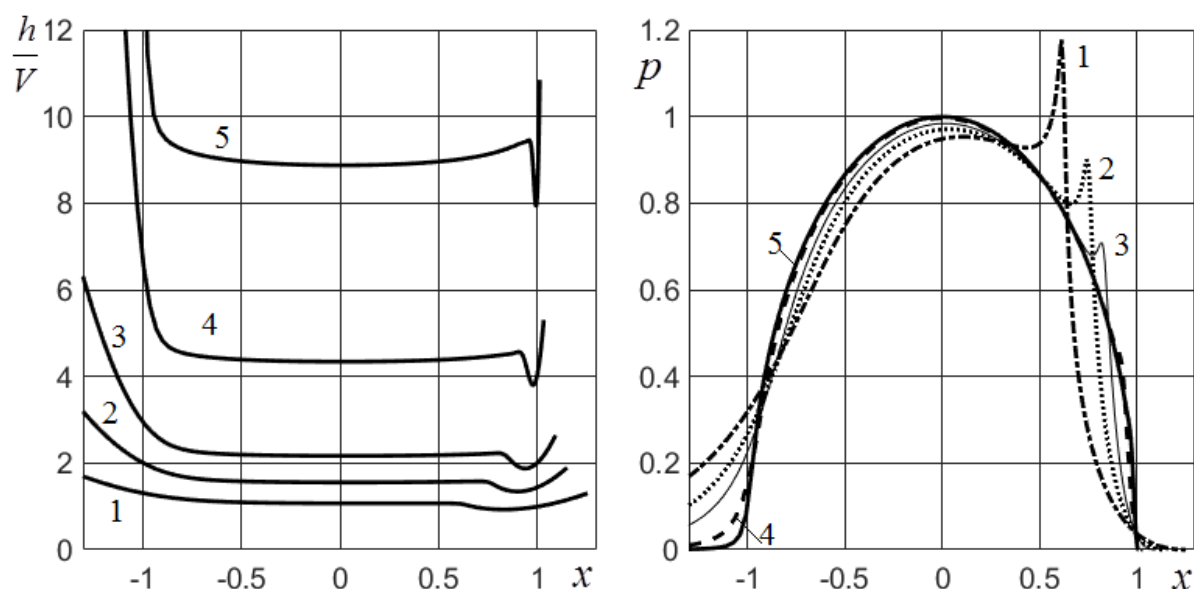


Рис. 2.36. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V=1$, 2 - $V=0.3$, 3 - $V=0.1$, 4 - $V=0.01$, 5 - $V=0.001$

При значении $V=80$ данные функции близки к их значениям в случае жестких тел. При понижении значения параметра V на графике функции $h(x)$, так же как и при $G=0$, появляется область, в которой функция $h(x)$ близка к линейной функции, однако в данном случае угол наклона этого участка к оси x близок к нулю. То есть в этой области функция $h(x)$ близка к постоянной функции. После области постоянства функции $h(x)$ наблюдается ее падение, а затем возрастание. На графике функции $h(x)$ это выглядит как впадина после участка, на котором $h(x) \approx \text{const}$. При дальнейшем уменьшении значения V область, в которой толщина смазочного слоя близка к постоянной толщине, расширяется, ширина впадины уменьшается, а ее глубина возрастает. Это иллюстрируют кривые, приведенные на рис. 2.35.

При уменьшении значения параметра V максимум давления сначала растет, и он продолжает заостряться, то есть точки перегиба функции $p(x)$,

расположенные в окрестности точки максимума $x = x_m$, приближаются к этой точке. Заострение максимума давления вызвано тем, что с ростом давления при движении смазки в сужающемся зазоре растет вязкость смазки, что способствует еще более быстрому росту давления.

Максимум давления, возрастая при уменьшении V , смещается вправо, то есть к выходу из зазора. При значении $V=10$ максимум расположен вблизи линии центров (вблизи координаты $x=0$). При дальнейшем уменьшении параметра V максимум давления продолжает смещаться вправо, а распределение давления в окрестности точки $x=0$ стремится принять форму, которую оно имеет при сухом контакте тел. В результате при некотором значении параметра V в окрестности точки $x=0$ появляется второй максимум. На кривых 1, 2 и 3 на правой части рис. 2.35 представлены функции $p(x)$, имеющие 2 максимума.

При дальнейшем уменьшении значения параметра V первый максимум давления, связанный с зависимостью вязкости смазки от давления, исчезает, и функция распределения давления приближается к распределению давления в контакте сухих тел. Таким образом, в некотором диапазоне изменения параметра V функция $p(x)$ имеет два максимума. Максимум, расположенный ближе к выходу из зазора, обусловлен совместным влиянием упругости и влиянием давления на вязкость смазочного материала. Другой максимум, расположенный в окрестности точки $x=0$, обусловлен влиянием только упругости.

Перейдем к рассмотрению влияния объемных упругих свойств контактирующих тел на составляющие коэффициента трения и коэффициент трения. Составляющие коэффициента трения в безразмерных переменных можно записать в виде

$$f_s = \sqrt{\frac{\mu_0 U_s^2}{6\pi W u}} \bar{f}_s, \quad f_r = 4\sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \bar{f}_r, \quad f_t = 2\sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} \bar{f}_t$$

$$f = \sqrt{\frac{\mu_0 U_s^2}{6\pi W u}} \bar{f}_s + 2\sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\frac{\mu_0 u}{W}} (\bar{f}_t + 2\bar{f}_r)$$

$$\bar{f}_s = \sqrt{V} \int_a^c \frac{\exp(Gp)}{h} dx, \quad \bar{f}_r = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_a^c x p(x) dx, \quad \bar{f}_t = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_a^c \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx$$

Учитывая (2.81), предельные соотношения для составляющих коэффициента трения получаем в виде

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \bar{f}_s \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} = 5.59, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} \bar{f}_t \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} = \lim_{V \rightarrow \infty} \bar{f}_r \Big|_{\substack{G=\text{const} \\ C_1=\text{const} \\ C_2=\text{const} \\ S=0}} = 0.752 \quad (2.80)$$

Расчеты показали, что в данном случае также с высокой точностью выполняется соотношение $\bar{f}_r = \bar{f}_t$. На рис. 2.37 приведены зависимости $\bar{f}_r$ от параметра V при различных значениях параметров - G, C_1 и C_2 . С ростом значения параметра G распределение давления становится более симметричным относительно линии действия нагрузки (прямой $x = 0$), что приводит к уменьшению значения параметра $\bar{f}_r$.

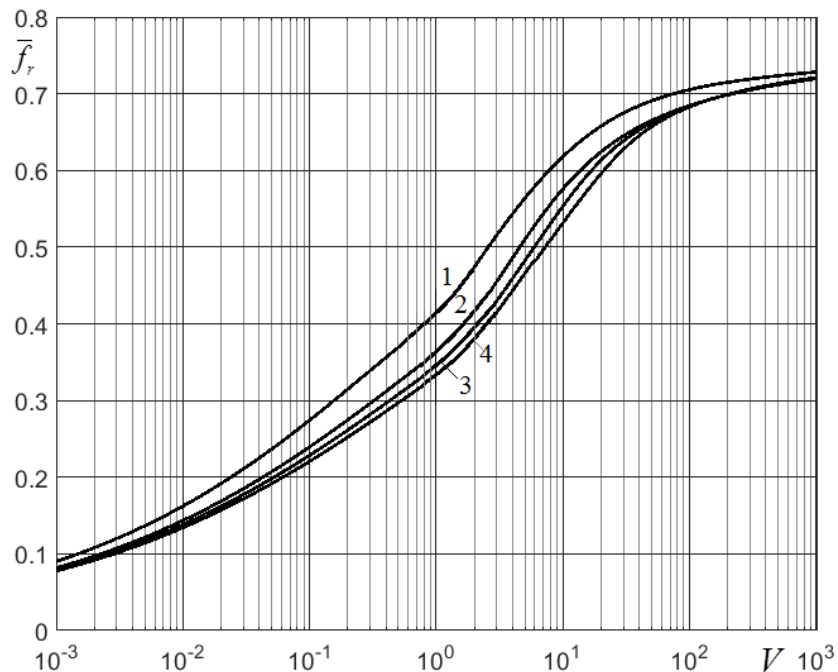


Рис. 2.37. Зависимости $\bar{f}_r$ от параметра V . Кривая 1 - $G = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$;

кривая 2 - $G = 3, C_1 = 0.6, C_2 = 1.7$; кривая 3 - $G = 5, C_1 = 0.6, C_2 = 1.7$; кривая 4 -

$G = 7, C_1 = 0.6, C_2 = 1.7$

Отметим, что изменение значения параметра $\bar{f}_r$ при изменении G от нуля до семи относительно невелико. Отметим также, что предельное соотношение (2.80) выполняется.

2.4. Контакт упругих тел с покрытиями из упругих и вязкоупругих материалов при наличии тонкого слоя вязкого смазочного материала

Поверхностные слои контактирующих тел могут проявлять свойства, отличные от объемных свойств. В частности, поверхностные слои могут проявлять упругие свойства, отличные от упругих объемных свойств, или вязкоупругие свойства. Задача о контакте вязкоупругих тел при отсутствии смазочного слоя рассматривалась в работах [17-19, 75, 101, 102, 115].

Одной из первых и наиболее значимых работ, посвященных исследованию влияния вязкоупругих свойств покрытий на характеристики смазываемого контакта, явилась работа И. Г. Горячевой с соавторами [103]. В ней рассматривалось влияние вязкоупругих свойств тонких покрытий, нанесенных на упругие цилиндрические тела, на характеристики смазываемого контакта. В качестве модели вязкоупругого покрытия использовалась одномерная линейная модель Максвелла с одним временем релаксации.

Показано, что вязкие свойства покрытия оказывают существенное влияние на характеристики контакта. Когда скорости относительного движения тел малы, максимум давления сдвинут в сторону входа смазки в зазор по отношению к случаю контакта однородных упругих тел. Это приводит к повышению деформационной составляющей коэффициента трения. По мере увеличения скорости движения влияние вязких свойств ослабевает и становится несущественным. В результате кривая зависимости

коэффициента трения от скорости качения имеет минимум, то есть имеет вид кривой Штрибека.

Метод решения задачи основан на решении одного нелинейного интегрального уравнения относительно толщины смазочного слоя. Данный метод эффективен в случае постоянной вязкости, когда не требуется дополнительных итераций относительно толщины смазочного слоя. В связи с этим основной анализ в работе представлен для случая постоянной вязкости.

Вопрос о влиянии вязкоупругих свойств контактирующих тел на характеристики смазываемых контактов рассматривался также другими авторами [74, 114, 137, 139]. Однако подробного анализа влияния вязкоупругих свойств деформируемых тел на толщину смазочного слоя, давление в нем и коэффициент трения с учетом изменения вязкости и плотности смазки с изменением давления до настоящего времени не проведено. В частности, не проведено влияние вязкоупругих свойств контактирующих тел на второй пик давления.

Рассмотрим контакт упругих цилиндров, покрытых тонкими слоями из упругого, или вязкоупругого материала (рис. 2.38).

В качестве реологической модели вязкоупругих слоев принимаем одномерную модель Кельвина с двумя временами релаксации. Зависимость между перемещениями поверхности вязкоупругого покрытия $\tilde{w}(\tilde{x})$ и приложенным к этой поверхности давлением $\tilde{p}(\tilde{x})$ задается уравнением

$$\tilde{w}(\tilde{x}) + T_\epsilon u \frac{d\tilde{w}(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = -\frac{\Delta}{E'} \left(\tilde{p} + T_\sigma u \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \right)$$

Здесь T_ϵ - время релаксации деформаций, T_σ - время релаксации напряжений, Δ - толщина покрытия. Для толщины смазочного слоя получаем выражение

$$\tilde{h} = \tilde{H} + \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{c}^2}{2R} - \frac{4}{\pi E'} \int_{-\infty}^{\tilde{c}} \tilde{p}(\xi) \ln \left| \frac{\tilde{x} - \xi}{\tilde{c} - \xi} \right| d\xi - \tilde{w}(\tilde{x}) + \tilde{w}(\tilde{c})$$

где
$$\tilde{w}(\tilde{x}) = -\frac{\Delta}{E'_v \zeta} \left[\tilde{p} + \frac{\zeta - 1}{T_\varepsilon u} \int_{-\infty}^{\tilde{x}} \exp\left(-\frac{\tilde{x} - \xi}{T_\varepsilon u}\right) \tilde{p}(\xi) d\xi \right], \quad \Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad E'_v = E'_1 = E'_2$$

приведенный длительный модуль упругости вязкоупругого покрытия, E' - приведенный модуль упругости упругих цилиндров, $\zeta = T_\varepsilon / T_\sigma$.



Рис. 2.38. Схема контакта

Введем безразмерные переменные по формулам

$$p = \frac{\tilde{p}}{p_g}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{b}, \quad h = \frac{2R\tilde{h}}{b^2}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \quad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0}, \quad H = \frac{2R\tilde{H}}{b^2},$$

где $b = \sqrt{\frac{8WR}{\pi E'}}$ - половина ширины площадки контакта, которая имела бы место при сухом контакте упругих цилиндров с приведенным радиусом R и с приведенным модулем упругости E' , p_g - максимальное давление в сухом контакте упругих цилиндров, имеющих приведенный радиус R и приведенный модуль упругости E' .

В безразмерных переменных уравнения и условия задачи принимают вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) - V \frac{d(\rho h)}{dx} = 0$$

$$\rho = 1 + \frac{C_1 p}{1 + C_2 p}, \quad \mu = \exp(Gp)$$

$$h(x) = H + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c \ln \left| \frac{c - \xi}{\xi - x} \right| p(\xi) d\xi +$$

$$+ \beta \left\{ p + \frac{\varsigma - 1}{\tau_\varepsilon} \left[\int_a^x \exp \left[-\frac{(x - \xi)}{\tau_\varepsilon} \right] p(\xi) d\xi - \int_a^c \exp \left[-\frac{(c - \xi)}{\tau_\varepsilon} \right] p(\xi) d\xi \right] \right\} \quad (2.81)$$

$$p(-\infty) = 0, \quad p(c) = 0, \quad \frac{dp}{dx} \Big|_{x=c} = 0$$

$$\int_a^c p(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{где } V = 3\pi^2 \frac{\mu_0 u R E'}{W^2}, \quad \tau_\varepsilon = \frac{T_\varepsilon u}{b}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{b} \frac{E'}{E'_v \varsigma}. \quad (2.82)$$

Некоторые свойства решения задачи. По сравнению с предыдущей системой уравнений в данной системе три новых входных параметра: ς , τ_ε и β . Значения этих параметров должны удовлетворять условиям: $\varsigma \geq 1$, $\tau_\varepsilon > 0$, $\beta \geq 0$.

При значении $\beta = 0$ данная система описывает смазываемый контакт упругих цилиндров с приведенным модулем упругости E' и с приведенным радиусом R .

При значениях $\beta > 0$ и $\varsigma = 1$ данная система описывает задачу теории смазки упругих тел с приведенным модулем упругости E' и покрытых тонкими упругими слоями с модулем упругости E'_v . Действительно, при значении $\varsigma = 1$ уравнение (2.81) принимает вид

$$h(x) = H + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c \ln \left| \frac{c - \xi}{\xi - x} \right| p(\xi) d\xi + \beta p$$

что соответствует случаю контакта упругих тел, покрытых тонкими упругими покрытиями с другим модулем упругости. При этом выражение для коэффициента β имеет вид

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{b} \frac{E'}{E_v}, \quad E_v' = \frac{(1-\nu_v)}{(1+\nu_v)(1-2\nu_v)} E_v, \quad E' = \frac{2}{1-\nu^2} E \quad (2.83)$$

где ν и E - коэффициент Пуассона и модуль упругости упругих цилиндров, а ν_v и E_v - коэффициент Пуассона и модуль упругости тонких упругих покрытий. Модель можно использовать при выполнении условий.

$$\frac{\Delta}{b} \ll 1, \quad \frac{E'}{E_v'} > 1 \quad (2.84)$$

Из (2.83) и (2.84) следует, что область изменения параметра β следует ограничить условиями $0 \leq \beta \leq 1$. Отметим, что при значении $\varsigma = 1$ параметр τ_ε не влияет на решение задачи и его задавать не надо.

Покажем, что при заданных значениях параметров $0 \leq \beta \leq 1, \varsigma \geq 1$ и при $V \rightarrow \infty$ решение задачи стремится к решению задачи теории смазки жестких тел. Для этого введем новые переменные по формулам

$$\hat{h} = \frac{h}{V}, \quad \hat{x} = \frac{x}{\sqrt{V}}, \quad \hat{p} = p\sqrt{V} \quad (2.85)$$

В переменных (2.85) уравнение (2.81) принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{h}(\hat{x}) = & \hat{H} + \hat{x}^2 - \hat{c}^2 + \frac{2}{\pi V} \int_a^{\hat{x}} \ln \left| \frac{\hat{c} - \xi}{\xi - \hat{x}} \right| \hat{p}(\xi) d\xi + \\ & + \frac{\beta}{V} \left\{ \frac{\hat{p}}{\sqrt{V}} + \frac{\varsigma - 1}{\tau_\varepsilon} \left[\int_a^{\hat{x}} \exp \left[-\sqrt{V} \frac{(\hat{x} - \xi)}{\tau_\varepsilon} \right] p(\xi) d\xi - \int_a^{\hat{c}} \exp \left[-\sqrt{V} \frac{(\hat{c} - \xi)}{\tau_\varepsilon} \right] \hat{p}(\xi) d\xi \right] \right\} \quad (2.86) \end{aligned}$$

При $V \rightarrow \infty$ уравнение (2.86) переходит в уравнение

$$\hat{h}(\hat{x}) = \hat{H} + \hat{x}^2 - \hat{c}^2$$

и исходная система уравнений переходит в систему уравнений задачи теории смазки жестких тел, записанную в безразмерных переменных $\hat{x}, \hat{h}, \hat{p}$. Из сказанного следует, что при $V \rightarrow \infty$ должны выполняться предельные соотношения (2.75). При $V \rightarrow 0$ толщина смазочного слоя в области контакта стремится к нулю и распределение давления по области контакта стремится к

распределению, которое имеет место в сухом контакте упругих тел с покрытиями.

Выражение для толщины смазочного слоя в узле $x = x_i$ запишем в виде

$$h_i = H + x_i^2 - c^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{N-1} p_j [g_{j,i} - g_{j,N}] + \beta \sum_{k=1}^{N-1} p_k [\hat{g}_{k,i} - \hat{g}_{k,N}], \quad i = 0, 1, \dots, N$$

где выражения элементов матрицы $g_{j,i}$ и приведены выше (формулы (2.78).

Выражения для элементов матрицы $\hat{g}_{k,i}$ получаем после замены соответствующих интегралов в (2.86) конечными суммами

Метод решения системы конечно-разностных уравнений данной задачи аналогичен методу решения системы уравнений предыдущей задачи.

Влияние тонких упругих покрытий с малым модулем упругости на характеристики смазываемого контакта упругих тел с покрытиями.

Рассмотрим сначала влияние тонких упругих покрытий на характеристики смазываемого контакта упругих тел. При этом будем полагать $\zeta = 1$ и $0 \leq \beta \leq 1$.

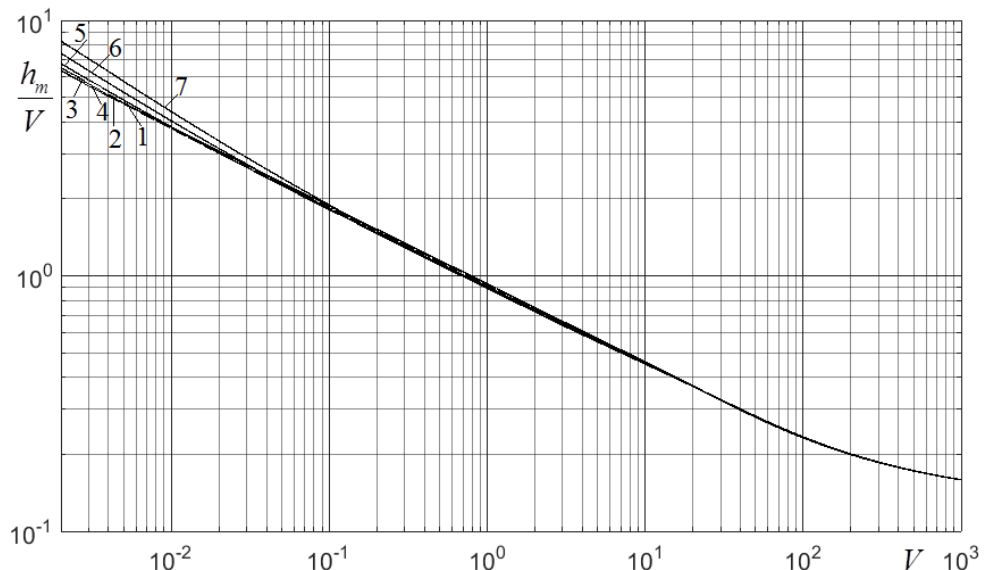


Рис. 2.39. Зависимости h_m/V от параметра V при $\zeta = 1$, $G = 7$, $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$ и при различных значениях параметра β . Кривая 1 - $\beta = 0$; 2 - $\beta = 0.03$; 3 - $\beta = 0.06$; 4 - $\beta = 0.1$; 5 - $\beta = 0.2$; 6 - $\beta = 0.5$; 7 - $\beta = 1$

На рис. 2.39 и рис. 2.40 приведены графики зависимостей h_m/V от параметра V и p_m от V при $\zeta=1$, $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при различных значениях параметра β .

Результаты расчетов, приведенные на рис. 2.39, показывают, что упругое покрытие практически не влияет на минимальную толщину смазочного слоя при значениях параметра $V > 0.1$. При значениях $V < 0.1$ это влияние заметно, но также относительно мало. При этом с ростом параметра β минимальная толщина смазочного слоя растет.

Однако упругое покрытие существенно влияет на максимальное давление в смазочном слое в широком диапазоне изменения параметра V . Это следует из результатов расчетов, приведенных на рис. 2.40. При этом с ростом параметра β максимальное давление падает.

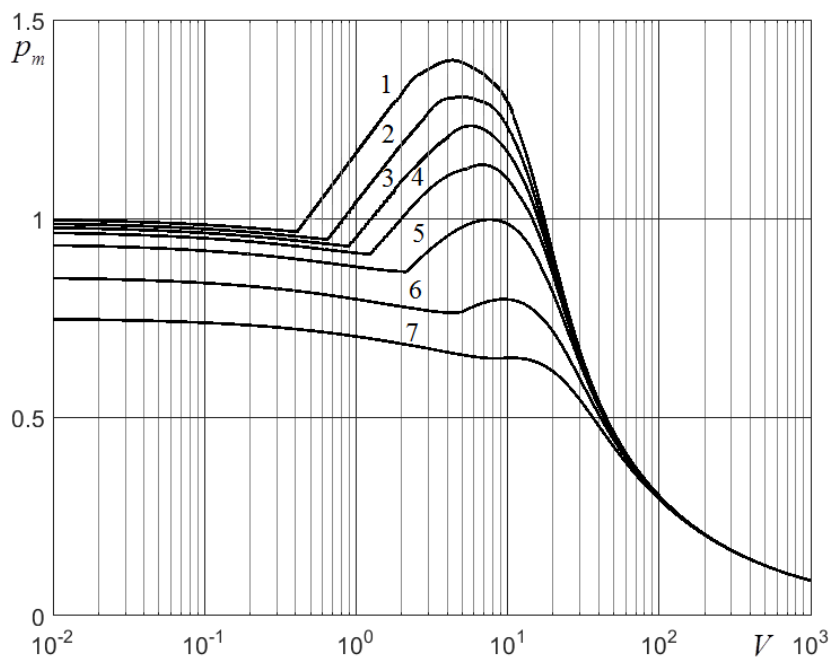


Рис. 2.40. Зависимости p_m от параметра V при $\zeta=1$, $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при различных значениях параметра β . Кривая 1 - $\beta=0$; 2 - $\beta=0.03$; 3 - $\beta=0.06$; 4 - $\beta=0.1$; 5 - $\beta=0.2$; 6 - $\beta=0.5$; 7 - $\beta=1$

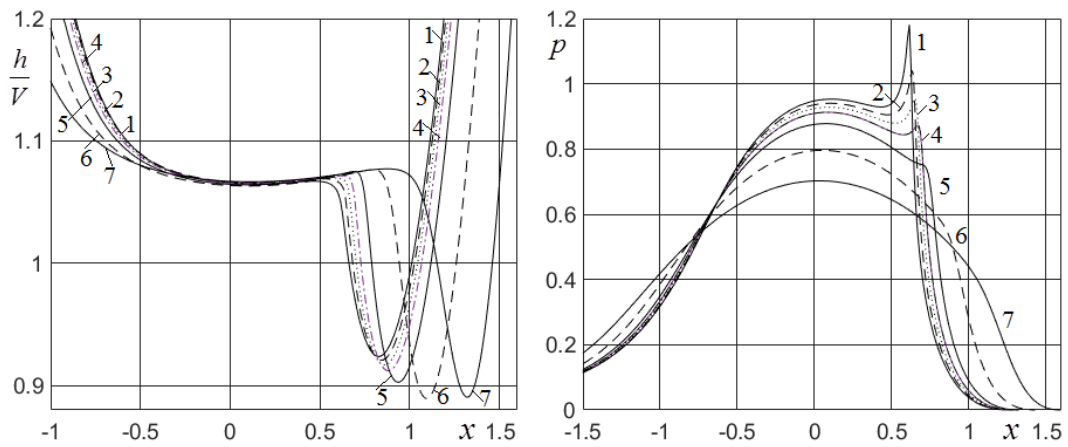


Рис. 2.41. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $V=1$, $\zeta=1$, $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при различных значениях параметра β . Кривые 1 - $\beta=0$; 2 - $\beta=0.03$; 3 - $\beta=0.06$; 4 - $\beta=0.1$; 5 - $\beta=0.2$; 6 - $\beta=0.5$; 7 - $\beta=1$

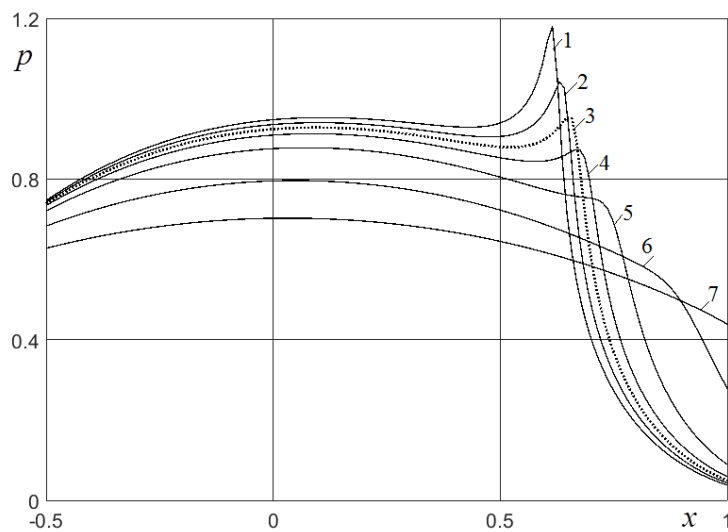


Рис. 2.42. Зависимости $p(x)$ при $V=1$, $\zeta=1$, $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при различных значениях параметра β . Кривая 1 - $\beta=0$; 2 - $\beta=0.03$; 3 - $\beta=0.06$; 4 - $\beta=0.1$; 5 - $\beta=0.2$; 6 - $\beta=0.5$; 7 - $\beta=1$

Влияние упругого покрытия на распределение давления и толщину смазочного слоя иллюстрируют результаты расчетов, приведенные на рис. 2.41. На данном рисунке приведены зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$, полученные при $V=1$, $\zeta=1$, $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$ и при различных

значениях параметра β . На рис. 2.42 приведены зависимости $p(x)$ при тех же значениях параметров, но в ограниченном интервале изменения переменной x .

Приведенные результаты расчетов показывают, что с ростом параметра β область высокого давления расширяется, а само давление понижается. При этом понижение давления начинается с понижения второго максимума. Уже при $\beta = 0.06$ второй максимум близок по величине с первым, основным, максимумом давления. При $\beta = 0.1$ второй максимум давления ниже первого, и при дальнейшем росте параметра β он исчезает.

Приведенные результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

1. Тонкое упругое покрытие с малым модулем упругости, нанесенное на упругие тела с высоким модулем упругости, может существенно изменить распределение давления в смазочно слое. В частности оно может полностью устранить второй максимум давления и существенно понизить максимальное давление в смазочном слое.

2. Тонкое упругое покрытие слабо влияет на минимальную толщину смазочного слоя и на толщину смазочного слоя в области высокого давления. При значениях параметра $V > 0.1$ данное влияние не существенно, а при значениях $V < 0.1$ оно заметное, но слабое.

Влияние тонких вязкоупругих покрытий на характеристики смазываемого контакта упругих тел с покрытиями. Рассмотрим теперь влияние вязкоупругого покрытия на характеристики смазочного слоя. Вязкоупругие свойства покрытия будут проявляться при значениях параметров $\beta > 0$, $\zeta > 1$, $\tau_\varepsilon > 0$. Параметр β определяется толщиной покрытия. Малой толщине покрытия соответствуют малые значения параметра β , большой толщине покрытия соответствуют высокие значения этого параметра. Из результатов, приведенных в предыдущем пункте, следует, что уже при значении $\beta = 0.2$ влияние упругого покрытия на

характеристики смазочного является сильным. Ниже приведены результаты расчетов при значении $\beta = 0.05$ и при значении $\beta = 0.2$.

Параметр τ_ε характеризует влияние времени релаксации на характеристики смазочного слоя. Малым значениям параметра τ_ε соответствуют времена релаксации, значительно меньшие времени прохождения области поверхности через область контакта. При входе поверхности в область контакта на нее начинает действовать давление со стороны смазочного слоя. Начальная реакция поверхности на это близка к реакции поверхности упругого покрытия с мгновенным модулем упругости. Однако при малых значениях параметра τ_ε эта реакция быстро переходит в реакцию поверхности упругого покрытия с длительным модулем упругости. При больших значениях параметра τ_ε поведение поверхности вязкоупругого покрытия в области контакта близко к поведению поверхности упругого покрытия с мгновенным модулем упругости.

Параметр ζ равен отношению мгновенного модуля упругости вязкоупругого покрытия к длительному модулю упругости. При значении $\zeta = 1$ вязкоупругое покрытие ведет себя как упругое покрытие. С ростом значения ζ влияние вязкоупругих свойств покрытия возрастает.

Ниже приведены результаты расчетов при значениях $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$. Начнем рассмотрение влияния вязкоупругих свойств покрытия на характеристики смазочного слоя с влияния параметра ζ . На рис. 2.43, 2.44 приведены зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при значениях $\tau_\varepsilon=1$, $V=1$, $\beta=0.05$ (рис. 2.43), $\beta=0.2$ (рис. 2.44) при различных значениях параметра ζ .

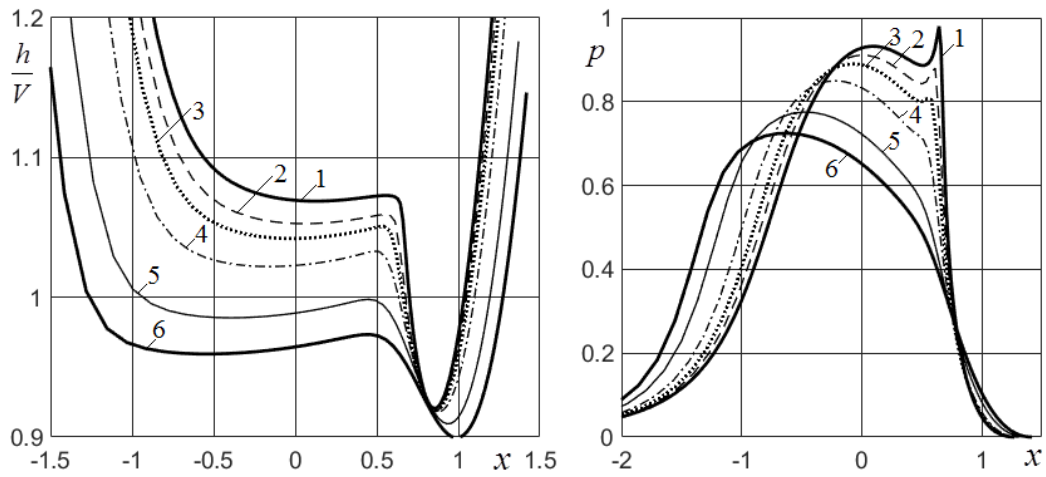


Рис. 2.43. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, $\tau_\varepsilon=1$, $V=1$, $\beta=0.05$ при различных значениях параметра ζ . Кривые 1 - $\zeta=1$; 2 - $\zeta=6$; 3 - $\zeta=11$; 4 - $\zeta=21$; 5 - $\zeta=41$; 6 - $\zeta=57$

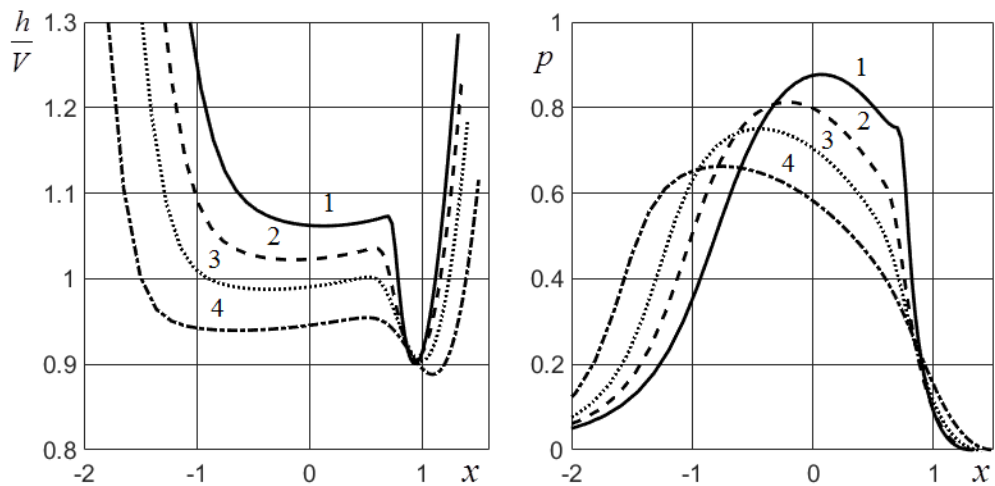


Рис. 2.44. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, $\tau_\varepsilon=1$, $V=1$, $\beta=0.2$ и при различных значениях параметра ζ . Кривые 1 - $\zeta=1$; 2 - $\zeta=6$; 3 - $\zeta=11$; 4 - $\zeta=19.6$

При значении $\beta=0.05$ (рис. 2.43) и $\zeta=1$ второй максимум давления существует. С ростом значения ζ второй максимум сначала уменьшается, а затем пропадает, основной максимум давления понижается, а его положение смещается влево, к входу в область контакта. Несимметричность давления относительно линии действия нагрузки возрастает, а крутизна графика

функции $p(x)$ во входной области возрастает. Повышение скорости роста давления во входной области приводит к ухудшению сходимости численных итераций. В результате понижения максимального давления происходит расширение области высокого давления. Расширение области высокого давления происходит, в основном, влево, в сторону входа.

Расширение области высокого давления с повышением значения ζ хорошо иллюстрируют графики функции $h(x)$, приведенные на левой части рисунка 2.43. По мере роста значения параметра ζ участок графика $h(x)$, на котором толщина смазочного слоя близка к постоянной, расширяется, значение толщины в этой области немного понижается и слегка растет положительный наклон функции $h(x)$ к оси x .

При этом минимальная толщина смазочного слоя также понижается, но это понижение существенно меньше понижения толщины смазочного слоя в области высокого давления. При значении $\beta = 0.2$ второй максимум давления отсутствует при значении $\zeta = 1$. С ростом значения ζ давление и толщина смазочного слоя ведут себя аналогичным образом, как и при значении $\beta = 0.05$. Отличие только в том, что второго максимума давления нет ни при каких значениях переменной ζ .

Влияние параметра τ_ε на распределение давления и толщину смазочного слоя иллюстрируют результаты расчетов, приведенные на рис. 2.45 и рис. 2.46, на которых приведены зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при значениях $\zeta = 11$, $V = 1$, $\beta = 0.05$ (рис. 2.45), $\beta = 0.2$ (рис. 2.46) при различных значениях параметра τ_ε .

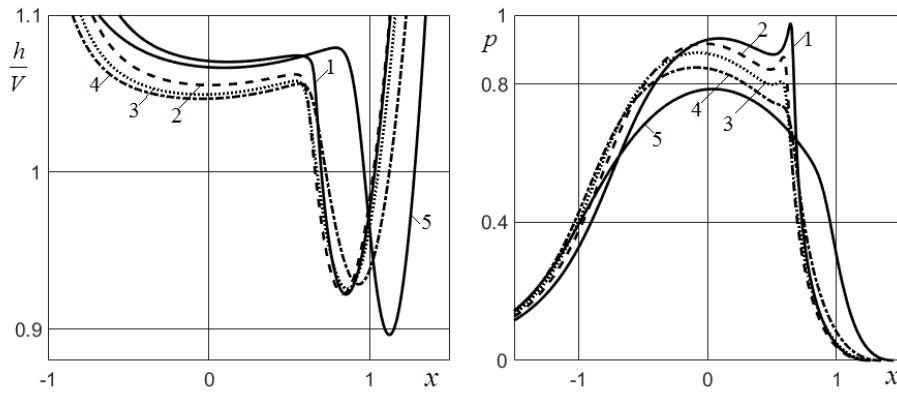


Рис. 2.45. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, $\varsigma=11$, $V=1$, $\beta=0.05$ и при различных значениях параметра τ_ε . Кривые 1 - $\tau_\varepsilon=100$; 2 - $\tau_\varepsilon=2$; 3 - $\tau_\varepsilon=1$; 4 - $\tau_\varepsilon=0.5$; 5 - $\tau_\varepsilon=0.01$

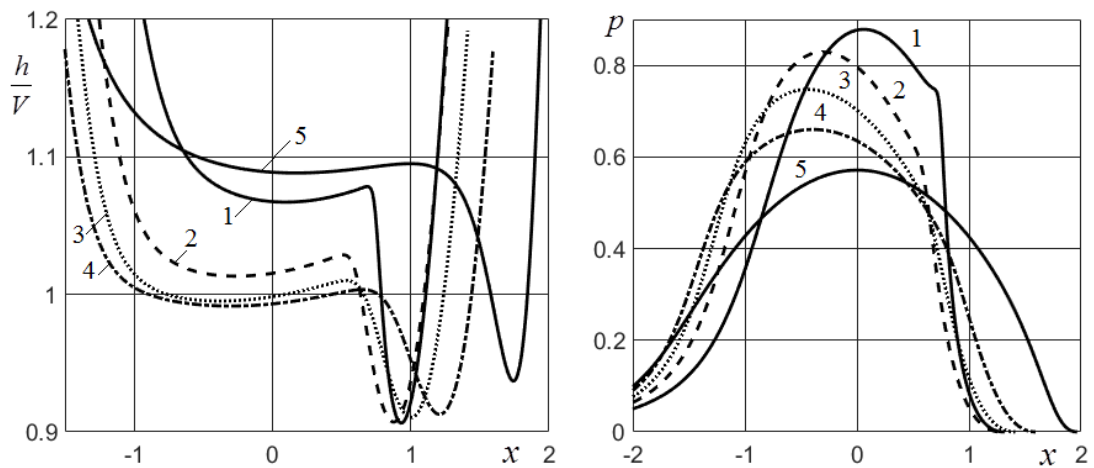


Рис. 2.46. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, $\varsigma=11$, $V=1$, $\beta=0.2$ и при различных значениях параметра τ_ε . Кривые 1 - $\tau_\varepsilon=100$; 2 - $\tau_\varepsilon=2$; 3 - $\tau_\varepsilon=1$; 4 - $\tau_\varepsilon=0.5$; 5 - $\tau_\varepsilon=0.01$

Значению $\tau_\varepsilon=100$ соответствует решение, близкое к решению для упругого слоя с модулем упругости, равным мгновенному модулю упругости вязкоупругого слоя. Значению $\tau_\varepsilon=0.01$ соответствует решение, близкое к решению для упругого слоя с модулем упругости, равным длительному модулю упругости вязкоупругого слоя. При переходе от одного решения к другому распределение давления изменяется аналогично тому, как это делается в случае сухого контакта жестких цилиндров с вязкоупругими

покрытиями. При этом второй максимум давления, имеющий место при малых значениях параметра β , уменьшается и пропадает при уменьшении параметра τ_ε , основной максимум давления сначала движется влево, а затем вправо, область контакта расширяется, сначала, в основном, влево, а затем, в основном, вправо.

При значении $\beta = 0.05$ падение давления и расширение области контакта относительно невелико, а при значении $\beta = 0.2$ - существенно.

Толщина смазочного слоя в области высокого давления сначала немного падает с понижением значения τ_ε от высокого значения, а затем повышается. Минимальная толщина смазочного слоя изменяется незначительно во всем интервале изменения параметра τ_ε .

Изменение распределения давления и толщины смазочного слоя с изменением параметра V иллюстрируют кривые, приведенные на рис. 2.47 и рис. 2.48. На данных рисунках приведены зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при значениях $\varsigma = 11$, $\tau_\varepsilon = 1$, $\beta = 0.05$ (рис. 2.47), $\beta = 0.2$ (рис. 2.48) при различных значениях параметра V .

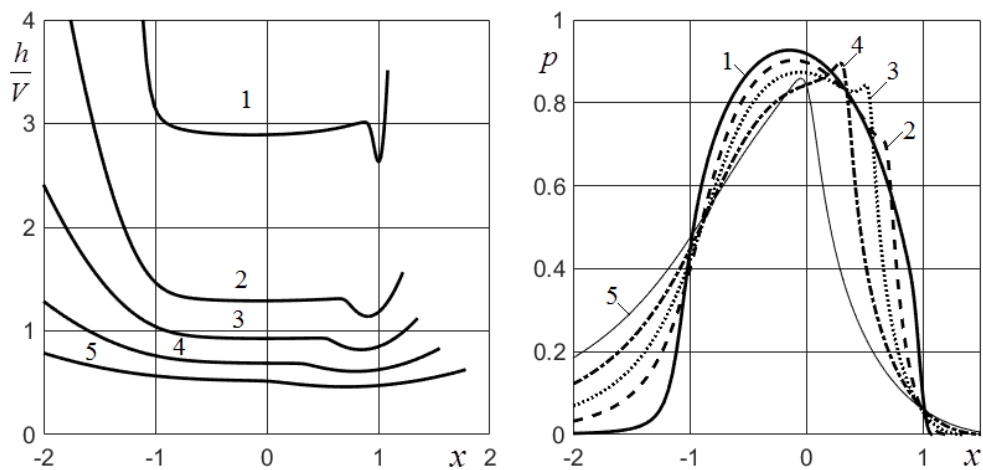


Рис. 2.47. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G = 7$, $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$, $\varsigma = 11$, $\tau_\varepsilon = 1$, $\beta = 0.05$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V = 0.03$; 2 - $V = 0.5$; 3 - $V = 1.5$; 4 - $V = 4$; 5 - $V = 10$

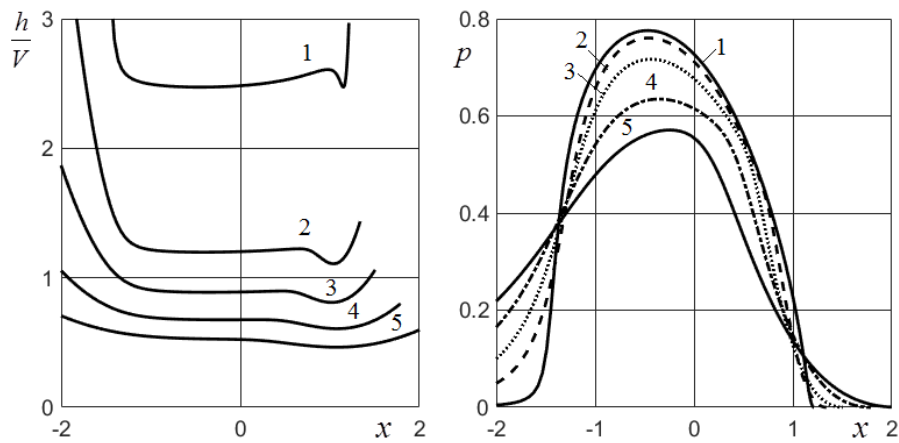


Рис. 2.48. Зависимости $h(x)/V$ и $p(x)$ при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, $\zeta=11$, $\tau_\varepsilon=1$, $\beta=0.2$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1 - $V=0.03$; 2 - $V=0.5$; 3 - $V=1.5$; 4 - $V=4$; 5 - $V=10$

При значении $V=0.03$ распределения давления в обоих случаях близко к распределению давления при соответствующем сухом контакте тел. Максимум давления расположен левее линии действия нагрузки. При этом при значении $\beta=0.2$ смещение точки максимума давления влево относительно линии действия нагрузки выше, чем при значении $\beta=0.05$. При возрастании значения параметра V максимум давления при значении $\beta=0.05$ сначала смещается вправо. При некотором значении параметра V в окрестности выходной граничной точки появляется второй максимум давления, который затем становится единственным и расположенным правее линии действия нагрузки. Затем этот максимум давления смещается влево и понижается. При дальнейшем росте значения параметра V распределение давления приближается к распределению, которое имеет место в гидродинамическом контакте жестких тел.

При значении $\beta=0.2$ второй максимум давления не образуется и распределение давления, изменяясь, постепенно переходит в распределение при гидродинамическом контакте жестких тел. График функции $h(x)/V$ опускается вниз с ростом значения параметра V и постепенно приближается

к графику, имеющему место в случае гидродинамического контакта жестких тел.

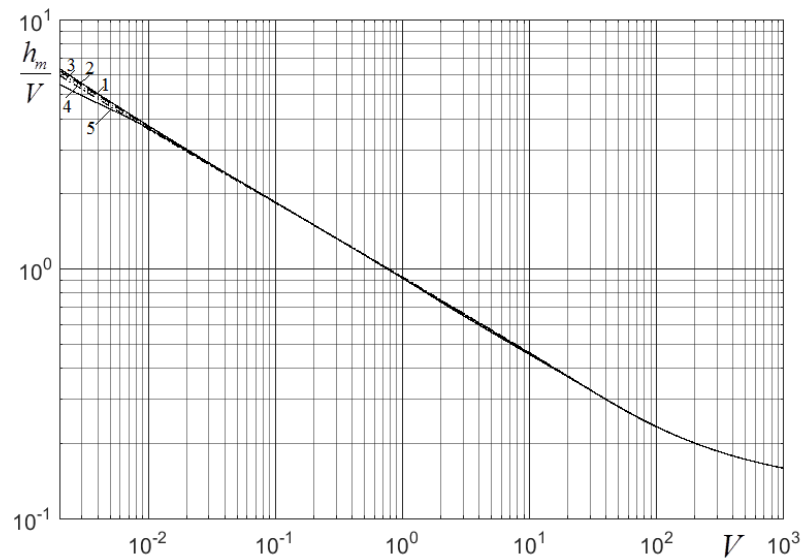


Рис. 2.49. Зависимости h_m/V от параметра V при $\varsigma=11$, $\beta=0.05$ и при различных значениях параметра τ_ϵ . Кривая 1 - $\tau_\epsilon=10$; 2 - $\tau_\epsilon=2$; 3 - $\tau_\epsilon=1$; 4 - $\tau_\epsilon=0.5$; 5 - $\tau_\epsilon=0.1$

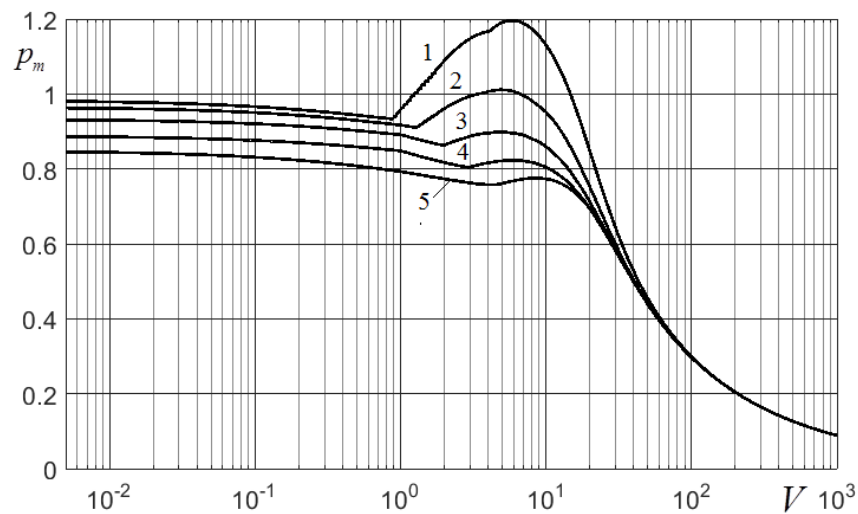


Рис. 2.50. Зависимости p_m от параметра V при $\varsigma=11$, $\beta=0.05$ и при различных значениях параметра τ_ϵ . Кривая 1 - $\tau_\epsilon=10$; 2 - $\tau_\epsilon=2$; 3 - $\tau_\epsilon=1$; 4 - $\tau_\epsilon=0.5$; 5 - $\tau_\epsilon=0.1$

На рис. 2.49 и 2.50 приведены зависимости h_m/V и p_m от параметра V при значениях $\varsigma=11$, $\beta=0.05$ и при различных значениях параметра τ_ϵ . На

рис. 2.51 и рис. 2.52 приведены аналогичные зависимости при значении $\beta = 0.2$.

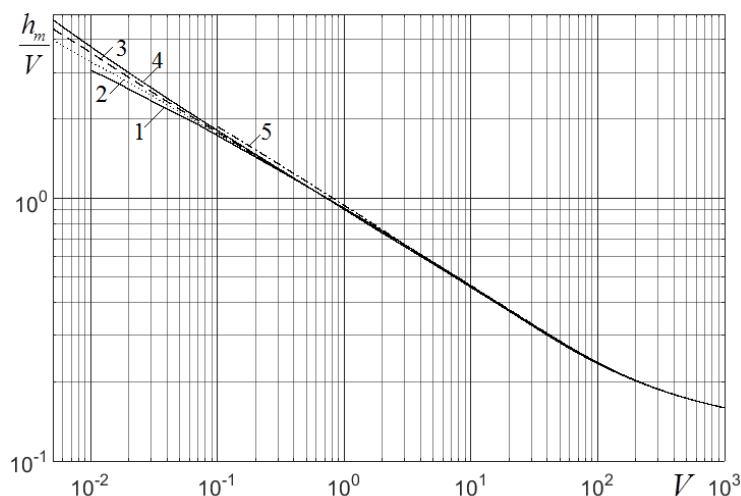


Рис. 2.51. Зависимости h_m/V от параметра V при $\zeta = 11$, $\beta = 0.2$ и при различных значениях параметра τ_ϵ . Кривая 1 - $\tau_\epsilon = 10$; 2 - $\tau_\epsilon = 2$; 3 - $\tau_\epsilon = 1$; 4 - $\tau_\epsilon = 0.5$; 5 - $\tau_\epsilon = 0.1$

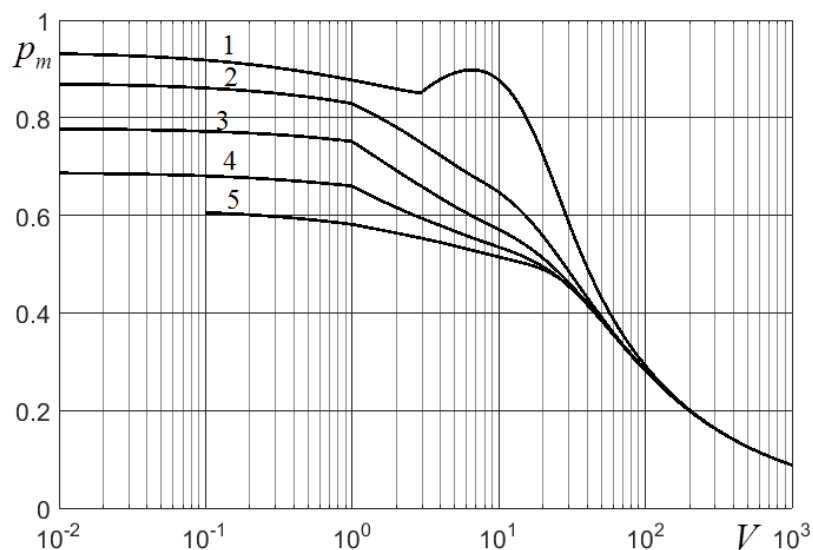


Рис. 2.52. Зависимости p_m от параметра V при $\zeta = 11$, $\beta = 0.05$ и при различных значениях параметра τ_ϵ . Кривая 1 - $\tau_\epsilon = 10$; 2 - $\tau_\epsilon = 2$; 3 - $\tau_\epsilon = 1$; 4 - $\tau_\epsilon = 0.5$; 5 - $\tau_\epsilon = 0.1$

Из результатов расчетов, приведенных на данных рисунках, следует, что время релаксации вязкоупругого покрытия слабо влияет на минимальную толщину смазочного слоя в широком диапазоне изменения параметра V . При этом с ростом значения параметра V это влияние ослабевает и при больших

значениях V данное влияние практически незаметно. При малых значениях параметра V данное влияние заметно, но оно также является слабым. При этом с ростом значения β данное влияние возрастает.

При высоких значениях V , при которых деформации тел слабо влияют на решение, время релаксации слабо влияет и на максимальное давление. Однако при малых значениях параметра V это влияние существенно. Особенно сильно это влияние проявляется при значениях V , при которых имеет место второй пик давления.

Влияние неньютоновских свойств смазки на давление и толщину смазочного слоя. Рассмотрим сначала случай упругих цилиндров. Система уравнений для случая смазки ньютоновской жидкостью упругих цилиндров в безразмерных переменных система уравнений имеет вид (2.63)-(2.66). В случае смазки жидкостью Эйринга вместо уравнения (2.63) надо использовать уравнение (2.26), где $\beta = S \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$, $S = \frac{W}{\pi R \tau_0}$, $S_1 = \frac{1}{6} \frac{u_s}{u}$, u_s - скорость скольжения, u - скорость качения. Параметры V и G определены в 2.3.

Метод решения системы (2.26), (2.64)-(2.66) аналогичен методу решения системы (2.63)-(2.66). Отличие состоит в том, что вместо конечно-разностного уравнения (2.79) необходимо решать уравнение

$$(a_k + \delta_k y_k)^3 [1 - \exp(-G y_k)] \Psi \left(\beta_{k-\frac{1}{2}} \right) \sqrt{1 + \left[\frac{S S_1}{h_{k-\frac{1}{2}}} \frac{\beta_{k-\frac{1}{2}}}{\text{sh} \left(\beta_{k-\frac{1}{2}} \right)} \exp(G(p_{k-1} + y_k)) \right]^2} =$$

$$= b_k G \left(\frac{H}{\rho_k} - a_k - y_k \delta_k \right), \beta_{k-\frac{1}{2}} = S \frac{h_{k-\frac{1}{2}}}{2} \frac{y_k}{x_k - x_{k-1}}, \Psi \left(\beta_{k-\frac{1}{2}} \right) = \frac{3 \left[\beta_{k-\frac{1}{2}} \text{ch} \left(\beta_{k-\frac{1}{2}} \right) - \text{sh} \left(\beta_{k-\frac{1}{2}} \right) \right]}{\beta_{k-\frac{1}{2}}^3}$$

Принципиальных отличий в методе решения задачи нет.

Рассмотрим сначала случай отсутствия скольжения, т. е. $S_1 = 0$. На рис. 2.53 приведены зависимости h_m/V от S и p_m от S при различных значениях

параметра V . Кривые 1-3 получены при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$. Кривая 4 получена при не учете влияния давления на плотность и вязкость смазки, т. е. при $G=C_1=C_2=0$. Кривая 1 получена при $V=0.01$, 2 – при $V=1$, 3 – при $V=100$, 4 – при $V=5$.

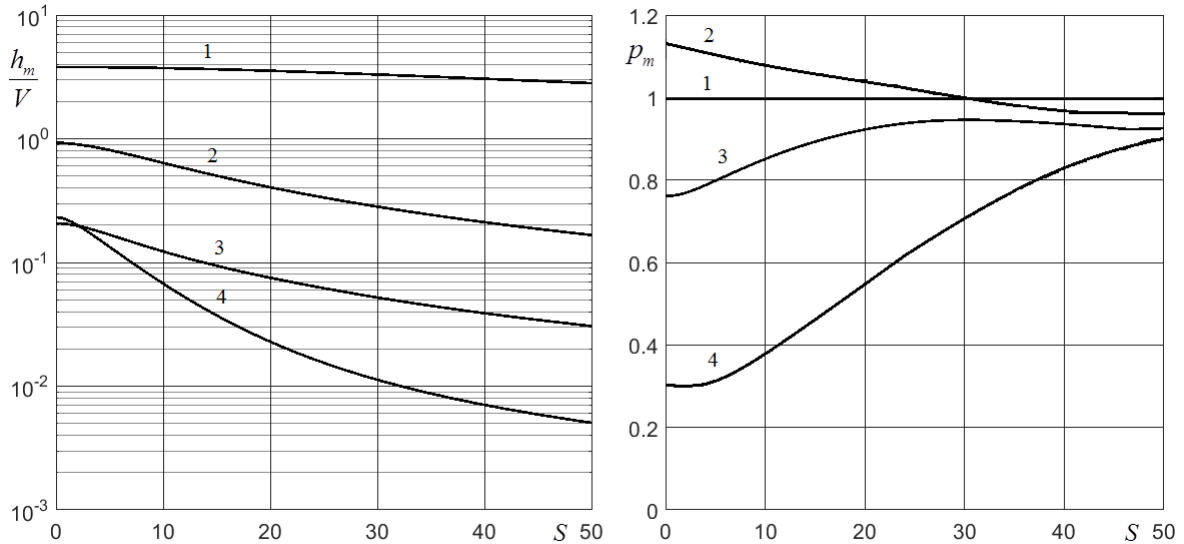


Рис. 2.53. Зависимости $h_m(S)/V$ и $p_m(S)$ при $S_1=0$ и при различных значениях параметра V . Кривые 1, 2 и 3 получены при $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, а кривая 4 – при $G=C_1=C_2=0$. Кривая 1 - $V=0.01$, 2 - $V=1$, 3 - $V=100$, 4 - $V=5$

Кривым 1 ($V=0.01$) соответствуют высокие деформации контактирующих тел. При этом распределение давления в смазочном слое близко к распределению давления при сухом контакте тел. Такое распределение должно быть при всех приведенных значениях параметра S . В результате максимальное давление с изменением значения параметра S практически не изменяется. Минимальная толщина смазочного слоя падает с ростом значения параметра S , но относительно медленно по сравнению с другими кривыми.

При $V=1$ функция $p(x)$ имеет два максимума, один из которых острый. Этот максимум принимает более высокие значения по сравнению с другим максимумом, но ограничение касательных напряжений приводит к

его понижению. В результате максимальное давление падает с ростом значения параметра S . Минимальная толщина смазочного слоя падает значительно быстрее с ростом S , чем при $V = 0.01$.

При $V = 100$ функция $p(x)$ имеет один максимум. Ограничение касательных напряжений приводит к более медленному росту давления на входе и, вследствие этого, к росту до более высокого значения. Однако понижение толщины смазочного слоя приводит к повышению давления. В результате максимальное давление сначала растет с ростом S , а затем слабо падает.

При отсутствии влияния давления на вязкость и плотность смазочного материала минимальная толщина смазочного слоя падает значительно быстрее с ростом S , чем при наличии этого влияния. Об этом свидетельствует кривая 4 на левой части рис. 2.53. Максимальное давление при этом также растет значительно быстрее, о чем свидетельствует кривая 4 на правой части рис. 2.53.

Влияние скорости скольжения на минимальную толщину смазочного слоя и на максимальное давление иллюстрируют результаты расчетов, приведенных на рис. 2.54.

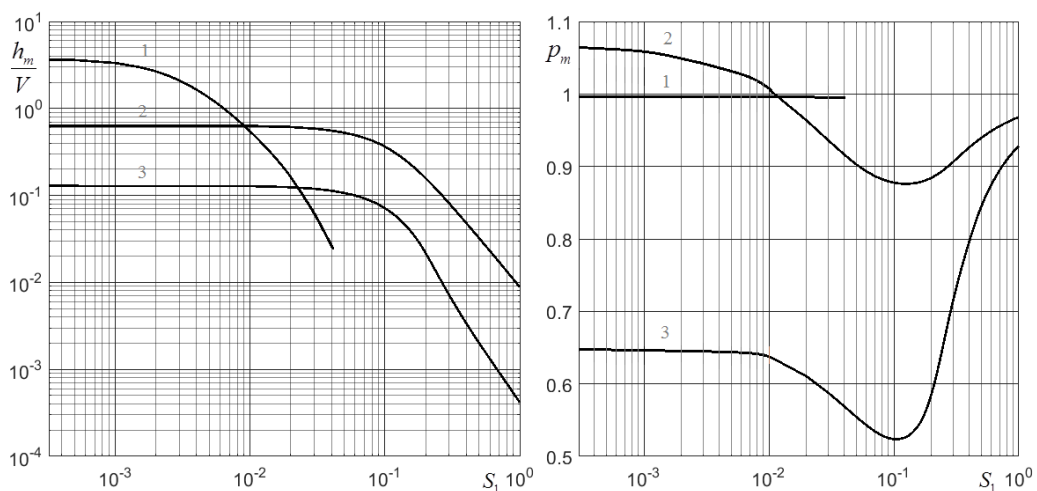


Рис. 2.54. Зависимости $h_m(S_1)/V$ и $p_m(S_1)$ при $G = 7$, $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$, $S = 10$ и при различных значениях параметра V . Кривая 1 - $V = 0.01$, 2 - $V = 1$, 3 - $V = 20$.

На данном рисунке приведены графики функций $h_m(S_1)/V$ и $p_m(S_1)$ при значениях параметров $G=7$, $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, $S=10$ и при различных значениях параметра V .

При значении $V=0.01$ функция $p(x)$ близка к функции, имеющей место при сухом контакте тел. При росте скорости скольжения в приведенном на рис. 2.54 интервале функция $p(x)$ изменяется незначительно, и максимальное давление остается практически постоянным.

При такой ситуации ограничение касательных напряжений возможно только за счет падения толщины смазочного слоя. В результате минимальная толщина смазочного слоя быстро падает при малых скоростях скольжения. При других значениях параметра V малые скорости слабо влияют как минимальную толщину смазочного слоя, так и на максимальное давление. Заметное изменение максимального давления происходит при значениях $S_1 > 0.01$. При дальнейшем росте значения параметра S_1 максимальное давление сначала существенно падает, а затем растет вследствие падения толщины смазочного слоя, которая начинает быстро падать при значениях $S_1 > 0.1$. Отметим, что при значении $V=0.01$ минимальная толщина смазочного слоя существенно понизилась уже при значении $S_1 = 0.01$.

2.5. Сопоставление теории и эксперимента

В работе [140] проведено экспериментальное определение минимальной толщины смазочного слоя в контакте качения роликов. Эксперимент проводился при следующих условиях: $R'=3.66\text{ см}$, $p_g=1.25\text{ ГПа}$, $E=2.2\text{ ГПа}$, $\nu=0.3$, масло Silicon lubricant, $\mu_0=0.0234\text{ Па}\cdot\text{с}$, $\alpha_p=7\cdot 10^{-9}\text{ Па}^{-1}$. В эксперименте изменялась скорость качения и измерялась минимальная толщина смазочного слоя. При этом температура в области контакта

поддерживалась постоянной, при которой вязкость масла равна указанной. На рис. 2.55 приведены результаты расчетов по изложенной выше методике (кривая 1), по формуле М. А. Галахова (кривая 2). Экспериментальные данные обозначены звездочками. Пунктирная кривая 3 есть график зависимости толщины смазочного слоя в месте его обрыва $\tilde{h}_0$ от скорости, построенный по формуле, полученной в работах А. М. Эртеля и А. Н. Грубина.

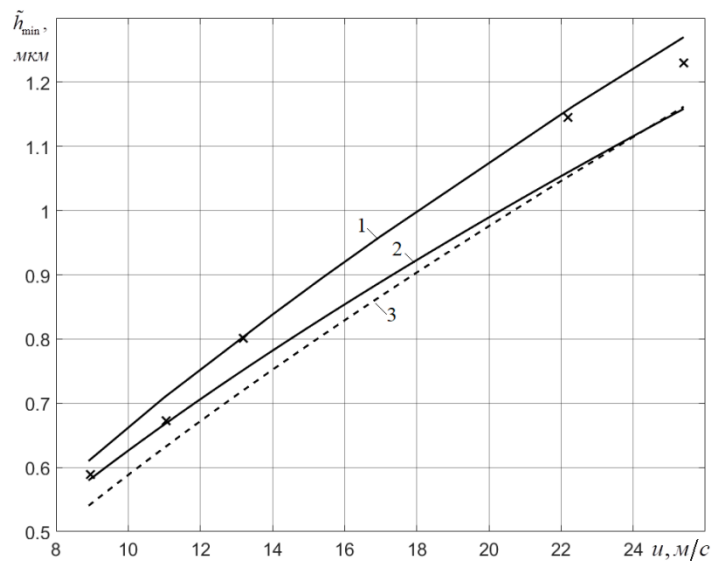


Рис. 2.55. Зависимость минимальной толщины смазочного слоя в контакте роликов от скорости. Кривая 1 – получена путем расчетов по изложенной выше методике; звездочки – экспериментальные данные; 2 – получена по формуле М. А. Галахова; 3 – зависимость $\tilde{h}_0(u)$ по формуле А. М. Эртеля, А. Н. Грубина.

В данном случае параметр V изменяется от значения 0.019 до значения 0.053. Распределение давления при этом близко к распределению давления при сухом контакте те. При скорости ниже 12 м/с второй максимум давления отсутствует. С ростом скорости он появляется и медленно растет, но вплоть до наибольшей скорости $u = 25.4$ м/с он значительно ниже первого максимума давления. Для примера на рис. 2.56 приведено распределение безразмерного давления $p(x)$ при скорости $u = 25.4$ м/с.

Приведенные на рис. 2.55 результаты показывают хорошее совпадение теории и эксперимента. При этом интервал изменения параметра V входит в интервал применимости формулы Галахова М. А. Формула Эртеля – Грубина дает более низкие значения толщины смазочного слоя по сравнению со значением $\tilde{h}_{\min}$, полученным путем решения системы уравнений (2.69) - (2.73).

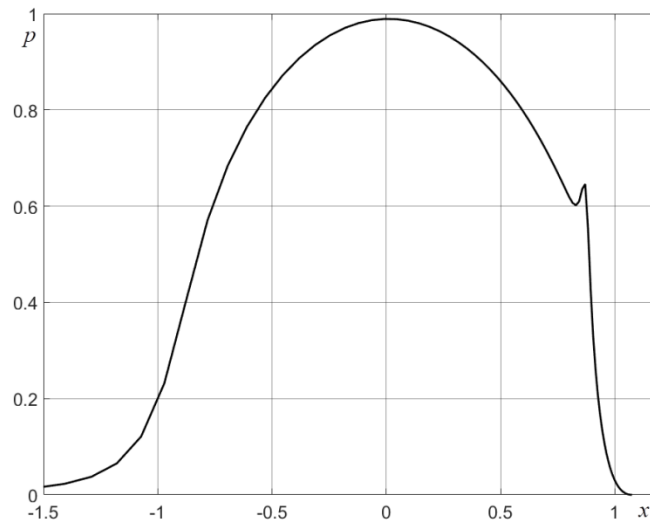


Рис. 2.56

2.6. Влияние деформаций на высоту неровностей профиля в области высокого давления шероховатых поверхностей

Вместо выражения (2.63) для функции $h(x)$ будем использовать выражение

$$h(x) = H + x^2 - c^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^c p(\xi) \ln \frac{c-\xi}{|\xi-x|} d\xi + R [\cos(\beta x) - \cos(\beta c)]$$

Здесь R пропорционально высоте неровностей профиля, β пропорционально высоте микронеровностей. Из результатов расчетов следует, что деформации понижают высоту неровностей профиля в области высокого давления.

Уровень понижения зависит от коэффициента жесткости V и шага неровностей. Для примера на рис. 2.59 приведены зависимости $h(x)$ в области высокого давления при двух значениях параметра V и двух значениях параметра β . Обозначим k отношение высоты неровностей профиля поверхности в исходном состоянии (вне области высокого давления) к высоте неровностей профиля в области высокого давления. Очевидно, $k = 2R/\Delta h$, где Δh - высота неровностей на рис. 2.57.

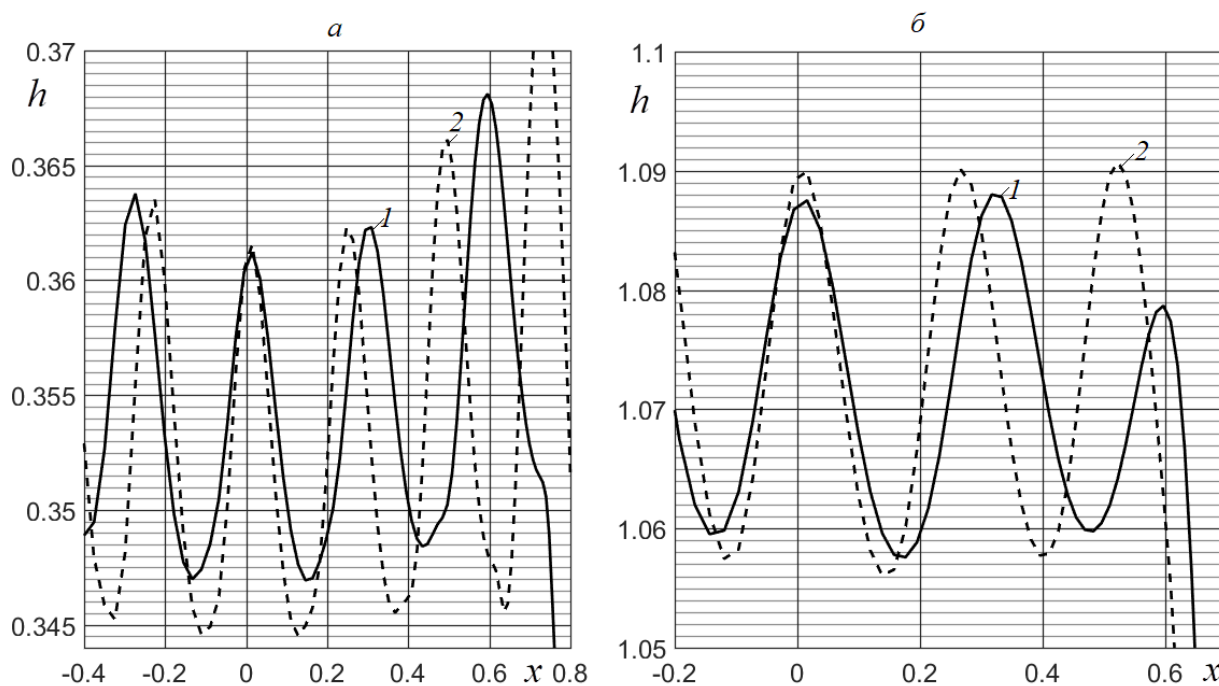


Рис. 2.57. Графики зависимостей $h(x)$; $R=0.03$; а - $V=0.2$; б - $V=1$; 1 - $\beta=25$; $\beta=30$

Из результатов, приведенных на рис. 2.57, следуют значения параметра k , приведенные в таблице 1.

Таблица 1.

V	0.2	1	0.2	1
β	25	25	30	30
k	4.28	2	3.63	1.76

Из результатов, приведенных в табл. 1, следует, что как с ростом значения коэффициента жесткости V , так и с ростом значения параметра β влияние деформаций поверхностей трения на высоту неровностей ослабевает, т. е. высота неровностей возрастает.

На рис. 2.58 приведены графики функций $k(V)$ при $R=0.03$, $G=7$ и двух значениях параметра β : $\beta=25$ и $\beta=30$. Из приведенных на рис. 2.85 результатов следует, что деформации поверхностей трения могут в несколько раз понизить высоту неровностей профиля в области высокого давления.

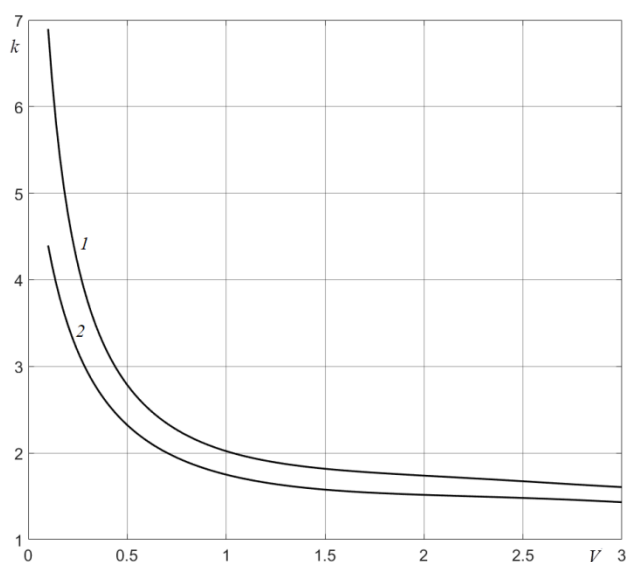


Рис. 2.58. Графики зависимостей $k(V)$; 1 - $\beta = 25$; 2 - $\beta = 30$

2.7. Примеры расчета узлов трения

Пример 1. Рассчитать минимальную толщину смазочного слоя и максимального давления в контакте ролика с наружным кольцом в подшипнике, работающем в буксовом узле железнодорожного вагона. Дано: радиус дорожки качения наружного кольца $R_1=0.111\text{ м}$, радиус ролика $r=16\text{ мм}$, материал роликов и колец – сталь ШХ15, модуль упругости

$E = 200 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, радиальная нагрузка на подшипник $F = 18.3 \text{ кН}$, угловая скорость вращения оси колесной пары $\Omega = 45 \text{ с}^{-1}$, смазочный материал – масло МС-20, температура поверхности ролика и дорожки $T = 323 \text{ }^{\circ}\text{К}$, рабочая длина ролика $l = 48 \text{ мм}$, число роликов $Z = 14$.

Определяем приведенный радиус кривизны контактирующих поверхностей $R = R_1 r / (R_1 - r) = 18.7 \text{ мм}$. Приравняв коэффициент неравномерности распределения нагрузки по роликам равным 5, находим нагрузку на наиболее нагруженный ролик $P = 5F/Z = 6536 \text{ Н}$ и нагрузку на единицу длины ролика $W = P/L = 0.136 \text{ Мн}$. Определяем $E' = E / (1 - \nu^2) = 220 \text{ ГПа}$.

Для определения скорости качения перейдем в систему координат, вращающуюся вместе с сепаратором с угловой скоростью ω_c . Тогда, линейную скорость дорожки качения кольца приравнявая линейной скорости поверхности ролика (условие чистого качения), получим уравнение $\omega_c R_1 = (\Omega - \omega_c) R_2$, где $R_2 = R_1 - 2r$, откуда скорость качения $u = \omega_c R_1 = \Omega R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 2.07 \text{ м/с}$. Вязкость смазочного материала МС-20 при температуре $T = 323 \text{ }^{\circ}\text{К}$ и атмосферном давлении равна $\mu_0 = 0.112 \text{ Па} \cdot \text{с}$, коэффициент зависимости вязкости от давления $\alpha_p = 2.3 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$.

Определяем максимальное давление $p_g = \sqrt{WE' / 2\pi R} = 0.505 \text{ ГПа}$. По формулам (2.67) находим $C_1 = 0.3$, $C_2 = 0.85$, $G = 11.6$, $V = 1.53$. Решая систему уравнений (2.63) - (2.66), получаем $c = 1.072$, $H = 2.19$, $h_m = 1.624$, $p_m = \tilde{p}_{\max} / p_g = 1.4$. Определяем $\tilde{p}_{\max} = 0.7 \text{ ГПа}$, $b_g = \sqrt{8WR / \pi E'} = 0.172 \text{ мм}$, $\tilde{h}_{\min} = b_g^2 h_m / 2R = 1.29 \text{ мкм}$.

Формула М. А. Галахова не применима в данном интервале изменения параметра V .

По формуле Эртеля – Грубина находим значение $H = 2.07$ и значение толщины смазочного слоя в месте его обрыва $\tilde{h}_0 = b_g^2 H / 2R = 1.64 \text{ мкм}$.

Полученное значение толщины смазочного слоя значительно выше минимальной толщины.

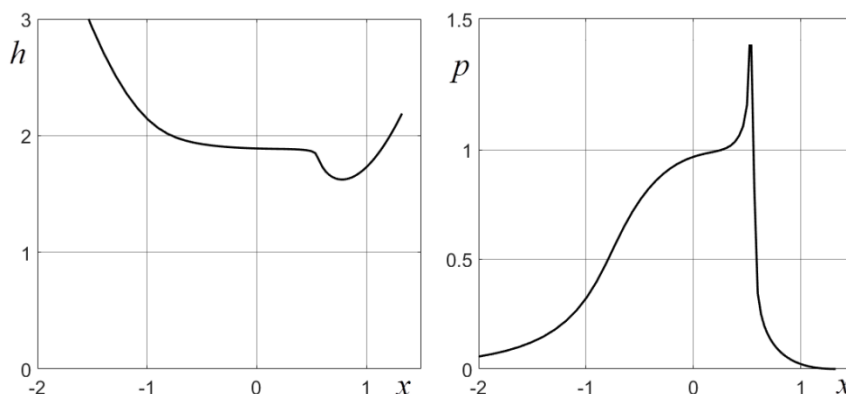


Рис. 2.59

На рис. 2.59 приведены графики зависимостей $h(x)$ и $p(x)$. Максимальное давление в данном случае в 1.4 раза превышает максимальное давление, рассчитанное по теории Герца, что важно знать при расчете на контактную прочность.

В табл. 2 приведены результаты расчетов при других значениях нагрузки на единицу длины ролика. Из приведенных в табл. 2 результатов расчетов следует, что при использовании формулы Эртеля – Грубина в данном примере получаем завышенное значение минимальной толщины смазочного слоя при всех значениях параметра W . Область применимости формулы Галахова М. А. ограничена только нагрузкой $W = 0.368 \text{ Мн}$. При этом получаем $\tilde{h}_{\min} = 1.11 \text{ мкм}$, что близко к значению минимальной толщины, полученной путем решения системы уравнений (2.69) - (2.73).

Таблица 2.

$W [\text{Мн}]$	$p_g [\text{ГПа}]$	G	V	$\tilde{h}_{\min} [\text{мкм}]$	$\tilde{p}_{\max} [\text{ГПа}]$	$\tilde{h}_0 [\text{мкм}]$	$\tilde{p}_{\max} / p_g$
0.368	0.824	19.60	0.211	1.2	0.9	1.49	1.09
0.305	0.75	17.85	0.308	1.22	0.84	1.52	1.12
0.266	0.7	16.66	0.406	1.24	0.81	1.54	1.15
0.195	0.6	14.30	0.752	1.27	0.77	1.58	1.28
0.136	0.5	11.60	1.530	1.29	0.70	1.64	1.4
0.087	0.4	9.52	3.800	1.35	0.58	1.71	1.45

Пример 2. Рассчитать минимальную толщину смазочного слоя и максимальное давление в контакте зубьев прямозубой цилиндрической передачи в точке входа в зацепление. Дано: модуль 5 мм, число зубьев шестерни 18, число зубьев колеса 72, угол зацеплений 20° , угловая скорость вращения шестерни $\omega_1 = 144 \text{ с}^{-1}$, угловая скорость вращения $\omega_2 = 36 \text{ с}^{-1}$, нагрузка на единицу длины зуба $W = 80 \text{ кН/м}$, вязкость масла $\mu_0 = 0.039 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\alpha_p = 1.96 \cdot 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$. Материал зубчатых колес – сталь, модуль упругости $E = 200 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

В точке входа в зацепление радиус кривизны колеса

$$R_2 = m \sqrt{(z_2/2)^2 \sin^2 \alpha + z_1 + 1} = 74.6 \text{ мм}, \text{ радиус кривизны шестерни}$$

$$R_1 = 0.5 m z_1 \sin \alpha (1 + z_2/z_1) - R_2 = 1.9 \text{ мм}, R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 1.8 \text{ мм}, \text{ скорость качения}$$

$$u_0 = (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) / 2 = 1.48 \text{ м/с}. \text{ В точке входа зацепление двухпарное, поэтому}$$

$$\text{нагрузку делим пополам. Получаем } p_g = 882 \text{ МПа}, b_g = 28.9 \text{ мкм}, V = 0.42,$$

$$G = 17.2.$$

Решая систему уравнений (2.69) - (2.72), получаем $c = 1.23$, $H = 1.08$,

$$h_m = 0.78, \tilde{h}_{\min} = 0.18 \text{ мкм}, p_m = 1.2, \tilde{p}_{\max} = 1.06 \text{ ГПа}. \text{ По формуле Эртеля – Грубина}$$

получаем $\tilde{h}_0 = 0.25 \text{ мкм}$, что в 1.39 раз выше минимальной толщины

смазочного слоя. Графики безразмерных функций $h(x)$ и $p(x)$ приведены на рис. 2.60.

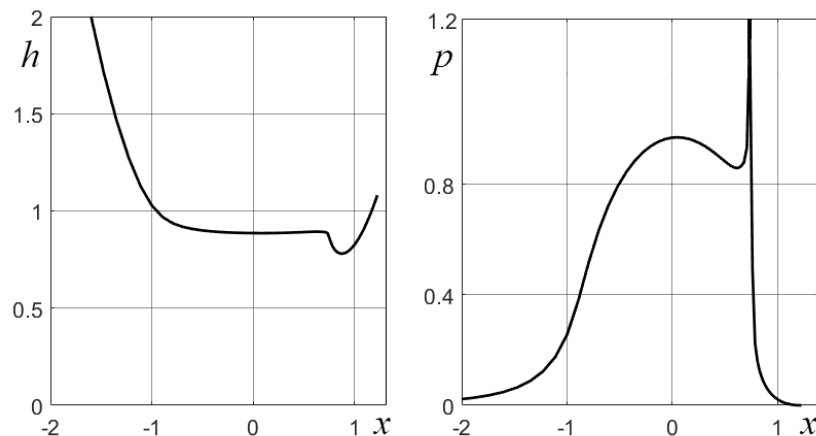


Рис. 2.60.

Выводы по Главе 2

Во второй главе рассмотрены стационарные задачи теории смазки деформируемых тел при локальном контакте. Рассмотрены задачи о смазываемых контактах упругих тел, жестких тел с тонкими вязкоупругими покрытиями, упругих тел с тонкими вязкоупругими покрытиями.

Решения задачи о смазываемом контакте тел с тонкими вязкоупругими покрытиями позволяют оценить влияние неупругих свойств поверхностных слоев контактирующих тел на характеристики контакта.

Изучены предельные решения задач о смазке деформируемых тел, а именно, решения задач о смазываемом контакте жестких. Проведен анализ полученных решений.

Получены новые решения задач о смазке упругих тел, упругих тел с покрытиями из упругих и вязкоупругих материалов в широких интервалах изменения коэффициента жесткости и вязкоупругих параметров. Проведен анализ полученных решений.

Показано, что в случае контакта упругих тел второй пик давления имеет место в некотором интервале изменения коэффициента жесткости. Максимальное давление в смазочном слое с учетом второго пика может значительно превышать давление, определяемое по теории Герца и используемое при расчетах на контактную прочность.

Установлено, что в условиях $\mu_0 u R E' / W^2 < 0.0042$ давление в смазочном слое близко к максимальному значению, как при отсутствии смазки (давление по Герцу), а в условиях $0.1 < \mu_0 u R E' / W^2 < 0.24$ и $\alpha_p p_g > 17$ (α_p - коэффициент зависимости вязкости смазочного материала от давления, p_g - давление по Герцу) давление в смазочном слое выше давления по Герцу более чем в 1.6 раза.

Вязкоупругие свойства поверхностных слоев слабо влияют на минимальную толщину смазочного слоя, но могут значительно снизить максимальное давление.

Исследовано влияние деформаций на высоту микронеровностей профиля шероховатых поверхностей трения в области высоких давлений. Показано, что деформации поверхностей трения понижают высоту неровностей профиля в области высокого давления. Уровень понижения зависит от коэффициента жесткости и шага неровностей и может быть многократным (более 2).

Приведено сопоставление результатов расчета минимальной толщины смазочного слоя в смазываемом контакте упругих тел с известными экспериментальными результатами. Сопоставление показало хорошее совпадение теории и эксперимента.

Приведены примеры расчета узлов трения.

Основные результаты главы опубликованы в работах [20 – 22, 25, 26, 53, 56 – 58, 60, 63 – 65, 67, 68, 104, 144, 145].

ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ

До сих пор рассматривались стационарные задачи теории смазки деформируемых тел. Однако смазываемые узлы трения часто работают в нестационарных условиях. Нестационарные условия могут быть обусловлены изменением скорости, нагрузки, а также одновременно и скорости и нагрузки.

Теоретическому исследованию нестационарных режимов работы смазываемых узлов трения с учетом деформаций контактирующих тел в зарубежной литературе посвящено большое количество работ [41, 81, 97, 98, 100, 111-113, 116, 117, 125, 132 - 134, 136, 148, 152 - 154]. В основном исследования касались нестационарных режимов при изменяющейся со временем нагрузки, или скорости, но без изменения направления движения скорости.

Однако узлы трения часто работают в реверсивном режиме, когда скорость движения поверхностей достигает нулевого значения, а затем возрастает в противоположном направлении. Например, такой режим работы реализуется в опорах скольжения реверсивных прокатных станов [49, 50].

Анализ нестационарных задач теории смазки показывает, что и при реверсивном движении поверхности могут быть разделены смазочным слоем достаточной толщины в течение всего периода реверсивного движения. При этом при малых скоростях давление в смазочном слое генерируется за счет сдавливания тонкого смазочного слоя.

В данной главе рассмотрены задачи о реверсивном движении смазываемых тел, как при внешнем контакте деформируемых цилиндров, так и при внутреннем контакте. Показано, что при малых скоростях функция $h(x)$ имеет два локальных минимума, один из которых расположен на входе в область высокого давления, а другой – на выходе из нее. Такая форма зазора

препятствует вытеканию смазки из области высокого давления, что способствует обеспечению необходимой толщины смазочного слоя при малых скоростях.

Особый интерес представляют нестационарные задачи теории смазки, моделирующие процесс формирования смазочного слоя на начальном этапе движения трущихся поверхностей из состояния покоя. Это связано с тем, что поломка узлов и агрегатов наиболее часто происходит именно в моменты пуска и останова. Кроме того, наибольший износ смазываемых узлов трения также характерен для моментов пуска и останова.

В работе [99] проведено экспериментальное исследование процесса формирования смазочного слоя при движении нагруженного стального шарика по покрытой смазочным материалом поверхности стеклянного диска. Форма зазора между телами определялась с высокой точностью со скоростью 1000 измерений в секунду. Показано, что в начальный момент движения большинство смазочных жидкостей образуют фронт, который распространяется по направлению движения поверхностей с почти неизменной формой. При чистом качении при прохождении области контакта скорость фронта ниже мгновенной скорости качения. Однако незадолго до полного разделения поверхностей скорость фронта возрастает и при разделении поверхностей превышает мгновенную скорость качения.

Теоретически процесс формирования смазочного слоя при движении поверхностей из состояния покоя рассматривался в работах [153, 154]. В этих работах предполагалось, что область контакта на начальном этапе движения состоит из двух областей: область, в которой имеет место непосредственный контакт поверхностей, и область, которая заполнена смазочной жидкостью. При этом предполагается, что для определения давления во второй области может быть использовано уравнение Рейнольдса, т.е. использовалась ньютоновская реологическая модель смазочного материала. В предложенной модели отсутствуют условия, или уравнения, определяющие скорость движения границы между областью сухого контакта и областью,

заполненной смазкой. Предполагается, что эта граница движется со скоростью, равной средней скорости движения поверхностей.

В работе [111] приведено сопоставление экспериментальной толщины смазочного слоя, приведенной в [99], с результатами расчета, полученными в работах [153, 154] и в работе [111]. Оказалось, что экспериментальная высота фронта значительно выше теоретической высоты. Экспериментальные и теоретические зависимости, приведенные в работе [111], приведены на рис. 3.1.

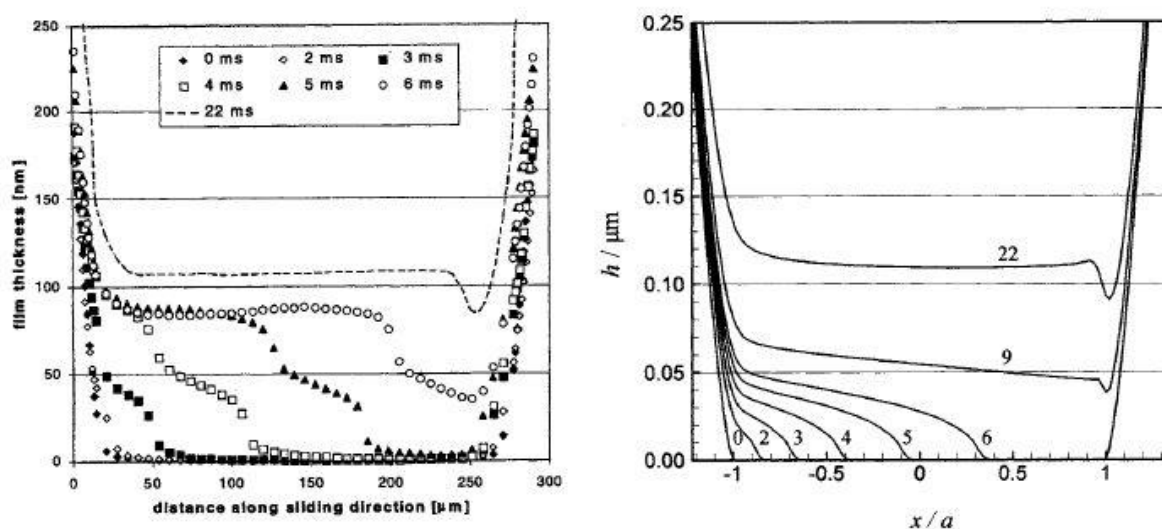


Figure 4. Entrainment centre line film profiles at start up for 10 m/s^2 acceleration. Left hand figure shows experimental results [1]. Right hand figure gives results of numerical analysis at times of 0, 2 ms, 3 ms, 4 ms, 5 ms, 6 ms, 9ms and 22 ms after beginning of ball motion.

Рис. 3.1. Экспериментальные и теоретические зависимости, приведенные в работе [114].

На рис. 3.1 видно, что отличие теории и эксперимента по высоте формируемого фронта смазочного материала при его прохождении области контакта велико. Фактическая высота фронта значительно выше теоретической высоты.

В данной главе построена математическая модель процесса, в которой вся область контакта до разделения поверхностей делится на три области: область непосредственного соприкосновения поверхностей, переходную область, в которой поверхности разделены, но смазочный материал не является жидким, и область гидродинамической смазки. В области

гидродинамической смазки используется модель Максвелла поведения смазочной жидкости в зазоре. В этой модели учитываются упругие свойства смазочной жидкости

Показано, что в начальные моменты движения поверхностей, когда скорость мала и происходит формирование раскрывающегося зазора, упругие свойства смазки существенно влияют на данный процесс, увеличивая высоту формирующегося фронта смазочного материала.

3.1. Численный анализ переходных процессов во внешнем УГД – контакте цилиндров при реверсе

Рассмотрим качение двух упругих цилиндров, разделенных слоем смазочного материала. Смазочный материал считаем сжимаемой ньютоновской жидкостью. Для учета изменения вязкости и плотности жидкости с изменением давления используем выражения (2.4). Полагаем, что нагрузка, прижимающая тела друг к другу, не меняется со временем, а скорость качения уменьшается по линейному закону до нуля, далее возрастает по линейному закону до исходного значения, но в противоположном направлении.

Таким образом, до момента времени $\tilde{t} = 0$ скорость качения u была постоянной и равной u_0 , а процессы в упругогидродинамическом контакте были стационарными. В интервале времени $0 \leq \tilde{t} \leq 2u_0/w$ скорость качения изменяется от значения u_0 до значения $-u_0$ с постоянным ускорением $-g$, где $g > 0$. До момента времени $\tilde{t} = \tilde{t}_0 = \frac{u_0}{g}$ происходит торможение, а в период времени $\tilde{t}_0 < \tilde{t} = 2\tilde{t}_0$ – ускорение в обратном направлении.

За положительное направление оси $\tilde{x}$ выберем направление движения поверхностей в начальный момент времени. Запишем систему уравнений в

период времени, когда происходит торможение, т. е. в моменты времени $0 \leq t \leq t_0$. В этом периоде времени область входа в смазочный слой расположена слева, а выходная область – справа. При этом входная координата области, занимаемой смазочным слоем, зафиксирована и не меняется. В период времени $t_0 \leq t \leq 2t_0$ входная координата смазочного слоя расположена справа, а выходная – слева. Если при этом поменять направление оси $\tilde{x}$ на противоположное, то система уравнений и условий не меняется.

Нестационарное уравнение Рейнольдса с учетом сказанного запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{h}^3}{12\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right) - (u_0 - g\tilde{t}) \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} \quad (3.1)$$

Уравнение контактных деформаций будет иметь вид (2.62), где $\tilde{h} = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{h}_0 = \tilde{h}_0(\tilde{t})$, $\tilde{a} = \text{const}$, $\tilde{c} = \tilde{c}(\tilde{t})$. Условие равновесия будет иметь также аналогичный вид, как и в стационарном случае. Отличие только в верхнем пределе интегрирования, который зависит от времени.

Левое граничное условие для давления сохраняется, т. е. $\tilde{p}(\tilde{a}, \tilde{t}) = 0$. Правое граничное условие требует уточнения. В начальный период времени торможения выходная граница смазочного слоя $\tilde{c}(\tilde{t})$ совершает малые перемещения с незначительной скоростью. В этот период времени можно использовать обычное условие: $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x} \big|_{\tilde{x}=\tilde{c}} = 0$. Однако когда скорость качения $u = u_0 - g\tilde{t}$ становится малой, движущиеся поверхности не успевают уносить смазочный материал, выдавливаемый из зазора. В итоге смазочный материал заполняет свободное пространство между телами и скорость движения границы $\tilde{c}(\tilde{t})$ возрастает. В некоторый момент времени она становится больше скорости u . Если $d\tilde{c} / d\tilde{t} > u$, то использование условия $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x} \big|_{\tilde{x}=\tilde{c}} = 0$ приводит к появлению отрицательных давлений в выходной области. Это означает, что данное условие становится не пригодным.

Подробно вопрос о граничных условиях для уравнения Рейнольдса в нестационарном случае рассматривался в [5]. Если $d\tilde{c}/d\tilde{t} > u$, то в системе координат, связанной с точкой $\tilde{c}(\tilde{t})$, касательная скорость поверхностей относительно жидкости направлена внутрь жидкости (к точке $\tilde{x} = 0$). Это означает, что поверхности уже не уносят смазочный материал из зазора через границу $\tilde{x} = \tilde{c}$, а наоборот, вносят в зазор. То есть граница $\tilde{x} = \tilde{c}$ становится входной. При этом смазочный материал, вытекающий из зазора через границу $\tilde{x} = \tilde{c}$, заполняет свободное пространство между поверхностями. Из данных, приведенных в [4], следует, что в этом случае граничное условие в системе координат, связанной с точкой $\tilde{c}(\tilde{t})$, имеет вид равенства вектора потока жидкости внутри области смазочного слоя вектору внешнего потока жидкости, переносимого границами. Внешний поток жидкости представляет собой вносимый в зазор поверхностями смазочный материал, прилипший к поверхностям до момента времени, когда скорость движения границы сравнялась со скоростью качения. Так как до этого периода времени толщина смазочного слоя $\tilde{h}_0$ растет со временем, то естественно предположить, что толщина слоя жидкости, вносимого поверхностями в зазор, меньше $\tilde{h}_0'$ и больше нуля. Здесь $\tilde{h}_0'$ - значение $\tilde{h}_0$ в момент времени, когда скорость движения границы сравнялась со скоростью качения. Принимая это условие, получаем:

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=\tilde{c}} = 0, \text{ если } \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{t}} \leq u, \quad -\frac{\tilde{h}_0^3}{12\mu_0} \left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=\tilde{c}} = \left(\tilde{h}_0 - m(t)\tilde{h}_0' \right) \left(\frac{d\tilde{c}}{d\tilde{t}} - u \right), \text{ если } \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{t}} > u \quad (3.2)$$

Здесь $m(\tilde{t})$ - неизвестная функция, принимающая значения в интервале $(0;1]$.

Важным свойством условия (3.2) на границе $\tilde{c}(\tilde{t})$ является непрерывность производной $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x}|_{\tilde{x}=\tilde{c}}$ относительно скорости u .

Ниже будут приведены результаты для случая $m(\tilde{t})=1$. Так как условие $d\tilde{c}/d\tilde{t} > u$ выполняется только в течение очень короткого периода времени в конце периода торможения, когда скорость качения близка к нулю, то влияние этой функции на решение невелико, однако ее введение позволяет исключить отрицательные давления в решении.

Приведем систему уравнений к безразмерному виду. Введем безразмерные переменные по формулам

$$p = \frac{\tilde{p}}{p_g}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{t_b}, \quad \tilde{t}_b = \frac{b_0}{u_0}, \quad h = \frac{2R\tilde{h}}{b_0^2} \quad (3.3)$$

Здесь p_g - максимальное давление при сухом контакте тел, рассчитываемое по теории Герца; b_0 - полуширина площадки контакта при сухом контакте тел; $\tilde{t}_b$ - время, за которое при движении со скоростью u_0 будет пройден путь b_0 .

Введя переменную

$$s = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (3.4)$$

и запишем уравнения и условия в безразмерных переменных следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = s, \quad \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = Vs(x, t) \quad (3.5)$$

$$q = -\frac{1}{G} \rho h^3 \frac{\partial \exp(-Gp)}{\partial x} - V \left(1 - \frac{t}{T}\right) \rho h, \quad (3.6)$$

$$h(x, t) = H(t) + x^2 - c(t)^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^{c(t)} p(\xi, t) \ln \frac{c(t) - \xi}{|\xi - x|} d\xi, \quad (3.7)$$

$$\int_a^{c(t)} p(\xi, t) d\xi = \frac{\pi}{2}. \quad (3.8)$$

$$\rho = 1 + \frac{C_1 p}{1 + C_2 p} \quad (3.9)$$

$$s(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) = h_c(x), \quad p(x, 0) = p_c(x), \quad c(0) = c_0,$$

где $T = u_0^2 / b_0 g$, $V = 48 \mu_0 u_0 R^2 / b_0^3 p_g$, $G = \alpha_0 p_g$, $C_1 = p_g \tilde{C}_1$, $C_2 = p_g \tilde{C}_2$,
 $H(t) = h(c(t), t)$, $h_c(x)$, $p_c(x)$, c_0 - значения параметра c и функций $h(x, t)$,
 $p(x, t)$ в момент времени $t = 0$. Они определяются путем решения стационарной задачи.

Значение T равно отношению времени, за которое при равноускоренном движении с ускорением $-W$ скорость изменяется от значения u_0 до нуля, ко времени, за которое при движении скоростью u_0 будет пройден путь b_0 . В реальных случаях значение $T \gg 1$.

Граничные условия для функции $p(x, t)$ имеют следующий вид:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=c} = 0, \text{ если } \frac{dc}{dt} < 1 - \frac{t}{T} \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=c} = -\frac{V}{H^3} (H - H') \left(\frac{dc}{dt} - \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right), \text{ если } \frac{dc}{dt} \geq 1 - \frac{t}{T} \quad (3.11)$$

Входными безразмерными параметрами задачи являются следующие параметры: T , V , G , K_1 , K_2 . После того, как эти параметры заданы, решаем стационарную задачу. В результате решения стационарной задачи получаем толщину смазочного слоя, и распределение давления в начальный момент времени. Далее решаем нестационарную задачу.

В безразмерных переменных выражения (3.3) будут иметь вид

$$\tilde{f}_r = \frac{b_0}{R} f_r, \quad \tilde{f}_t = \frac{b_0}{R} f_t, \quad f_r = - \int_A^c x p(x) dx, \quad f_t = \int_A^c \frac{h}{4} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (3.12)$$

Метод численного решения нестационарной задачи. В этом разделе на примере рассматриваемой задачи излагается общий метод решения нестационарных задач. Без каких-либо сложностей он легко распространяется на нестационарные задачи любого типа.

В начальный момент времени $t = 0$ функции $p(x, 0)$, $h(x, 0)$, $\rho(x, 0)$ и переменные $c(0)$, $H(0) = h(c(0), 0)$ определяются путем решения стационарной задачи. Пусть значения этих функций и переменных

определены в момент времени $t = t_{i-1}$. То есть известны значения $c_{i-1} = c(t_{i-1})$, $H_{i-1} = H(t_{i-1})$, на отрезке $[a, c_{i-1}]$ введена, в общем случае, неравномерная сетка $\{x_k^{i-1}, k = 0, 1, \dots, N; x_0^{i-1} = a; x_N^{i-1} = c_{i-1}\}$ и известны значения $p_k^{i-1} = p(x_k^{i-1}, t_{i-1})$, $h_k^{i-1} = h(x_k^{i-1}, t_{i-1})$, $\rho_k^{i-1} = \rho(x_k^{i-1}, t_{i-1})$, $k = 0, 1, \dots, N$, причем $h_N^{i-1} = H_{i-1}$. Покажем, как можно определить все указанные переменные в момент времени $t = t_i > t_{i-1}$.

Пусть на отрезке $[a, c_i = c(t_i)]$ оси x введена неравномерная сетка $\{x_k^i, k = 0, 1, \dots, N; x_0^i = a; x_N^i = c_i\}$. Принимаем во втором уравнении (3.5) $t = t_i$ и проинтегрируем по переменной x на отрезке $\left[x_{j-\frac{1}{2}}^i, x_{j+\frac{1}{2}}^i\right]$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, где

$x_{j-\frac{1}{2}}^i = \frac{1}{2}(x_{j-1}^i + x_j^i)$, $x_{j+\frac{1}{2}}^i = \frac{1}{2}(x_j^i + x_{j+1}^i)$. При вычислении интеграла в правой части уравнения функцию $s^i(x)$ заменим сплайн - функцией первого порядка

$$s^i(x) = \sum_{r=0}^N s_r^i v_r^i(x) \quad (3.13)$$

где $v_r^i(x)$ - кусочно-линейная функция, $v_r^i(x) = 1$ если $x = x_r^i$ и $v_r^i(x) = 0$ если $x = x_k^i, k \neq r$. В результате получаем

$$q_{j-\frac{1}{2}}^i = q_{j+\frac{1}{2}}^i + \frac{V}{8} \left[3s_j^i (x_{j+1}^i - x_{j-1}^i) + s_{j-1}^i (x_j^i - x_{j-1}^i) + s_{j+1}^i (x_{j+1}^i - x_j^i) \right] \quad (3.14)$$

$j = 1, 2, \dots, N-1$. Проинтегрировав второе уравнение (3.5) по переменной x на отрезке $\left[x_{N-\frac{1}{2}}^i, x_N^i\right]$, получаем

$$q_{N-\frac{1}{2}}^i = q_N^i + \frac{V}{8} (3s_N^i + s_{N-1}^i) (x_N^i - x_{N-1}^i) \quad (3.15)$$

Рассмотрим случай, когда выполняется граничное условие (3.10). Случай выполнения условия (3.11) рассматривается аналогично.

При выполнении условия (3.10), учитывая (3.6), выражение (3.15) можно записать в виде

$$q_{N-\frac{1}{2}}^i = -V \left(1 - \frac{t_i}{T} \right) H_i + \frac{V}{8} (3s_N^i + s_{N-1}^i) (x_N^i - x_{N-1}^i) \quad (3.16)$$

где $H_i = H(t_i)$. Из уравнения (3.6) и условия (3.10) следует, что

$$q_N^i = -V \left(1 - \frac{t_i}{T} \right) H_i \quad (3.17)$$

Примем в уравнении (3.6) $t = t_i$, $x^i = x_{j-\frac{1}{2}}^i$, заменим производную конечной разностью и запишем данное уравнение в следующем виде

$$q_{j-\frac{1}{2}}^i = -\frac{1}{G} \rho_j^i h_{j-\frac{1}{2}}^i \left[\exp(-Gp_j^i) - \exp(-Gp_{j-1}^i) \right] - V \left(1 - \frac{t_i}{T} \right) \rho_j^i h_{j-\frac{1}{2}}^i, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.18)$$

где $h_{j-\frac{1}{2}}^i = \frac{1}{2} (h_{j-1}^i + h_j^i)$.

Заменяя в (3.7) интеграл конечной суммой, как это производилось в стационарном случае, получаем

$$h_k^i = H_i + (x_k^i)^2 - c_i^2 - \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{N-1} p_j^i [g_{j,k}^i - g_{j,N}^i], \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

$$g_{j,k}^i = g_j(x_k^i), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Введем $2N$ функций $F_j, j = 1, 2, \dots, 2N+1$ относительно $2N+1$ неизвестных $\{H_i, c_i, p_k^i (k = 1, 2, \dots, N-2), s_k^i (k = 0, 1, \dots, N)\}$, которые при заданных значениях переменных $\{H_i, c_i, p_k^i (k = 1, 2, \dots, N-2), s_k^i (k = 0, 1, \dots, N)\}$ вычисляем следующим образом.

1. На отрезке $[a, c_i]$ оси x вводим неравномерную сетку $\{x_k^i, k = 0, 1, \dots, N; x_0^i = a; x_N^i = c_i\}$.
2. По формуле (3.17) вычисляем q_N^i .
3. По формуле (3.16) вычисляем $q_{N-\frac{1}{2}}^i$.
4. По формуле (3.14) вычисляем $q_{k-\frac{1}{2}}^i, k = N-1, N-2, \dots, 1$.
5. Решаем систему уравнений (3.18), (3.19) относительно переменных p_j^i, h_j^i

таким же методом, как это делалось в стационарном случае. При известных

значениях $q_N^i, q_{k-\frac{1}{2}}^i, k=1,2,...,N$ система уравнений аналогична системе уравнений в стационарном случае. Обозначим p_k^{i*}, h_k^{i*} ($k=0,1,...,N-1$) полученные в результате решения системы уравнений значения переменных. Принимаем

$$F_1 = p_0^{i*}, F_2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (p_{k-1}^{i*} + p_k^{i*}) (x_k^{i*} - x_{k-1}^{i*}) - \frac{\pi}{2}, F_{k+2} = p_k^{i*}, k=1,2,...,N-2 \quad (3.20)$$

6. Используя полученные значения p_k^{i*} , вычисляем $\rho_k^{i*}, k=1,2,...,N-1$.

Отметим, что $\rho_0^{i*} = \rho_N^{i*} = 1$.

7. Имея значения функций $\rho(x, t_{i-1}), h(x, t_{i-1})$ в узлах сетки $\{x_k^{i-1}, k=0,1,...,N; x_0^{i-1}=a; x_N^{i-1}=c_{i-1}\}$ путем интерполяции вычисляем значения этих функций в узлах сетки в момент времени $t=t_i$. Обозначим эти значения $\rho_k^{i-1,*} = \rho(x_k^i, t_{i-1}), h_k^{i-1,*} = h(x_k^i, t_{i-1}), k=0,1,...,N$.

Принимаем $F_{N+1+k} = \frac{\rho_k^i h_k^i - \rho_k^{i-1,*} h_k^{i-1,*}}{t_i - t_{i-1}} - s_k^i, k=0,1,...,N$. Система уравнений

$F_k = 0, k=1,2,...,2N+1$ решается методом Ньютона-Рафсона.

Анализ численного решения. На рис.3.2 - 3.6 приведены результаты расчетов, полученные при следующих значениях безразмерных параметров: $A=4.5, T=400, V=1, G=7, C_1=0.6, C_2=1.7$. На рис. 3.2 приведены зависимости $p(x)$ и $h(x)$ в различные моменты времени при торможении до нулевой скорости, а на рис.3. 3 и рис. 3.4 – при ускорении в обратном направлении. На рис. 3.5 приведены зависимости параметров f_d, f_r и f от безразмерного времени t . На рис. 3.6 приведена зависимость безразмерной минимальной толщины смазочного слоя h_m от безразмерного времени t .

Рассмотрим сначала процесс торможения до нулевой скорости. В начальный момент времени давление имеет высокий второй максимум (рис. 3.2). По мере уменьшения скорости второй максимум уменьшается, а распределение давления становится более симметричным относительно оси

$x = 0$, приближаясь к распределению давления при сухом контакте тел. При этом первый максимум давления немного возрастает. Такое изменение функции распределения давления приводит к падению составляющей f_r коэффициента трения (кривая 1 на рис. 3.5).

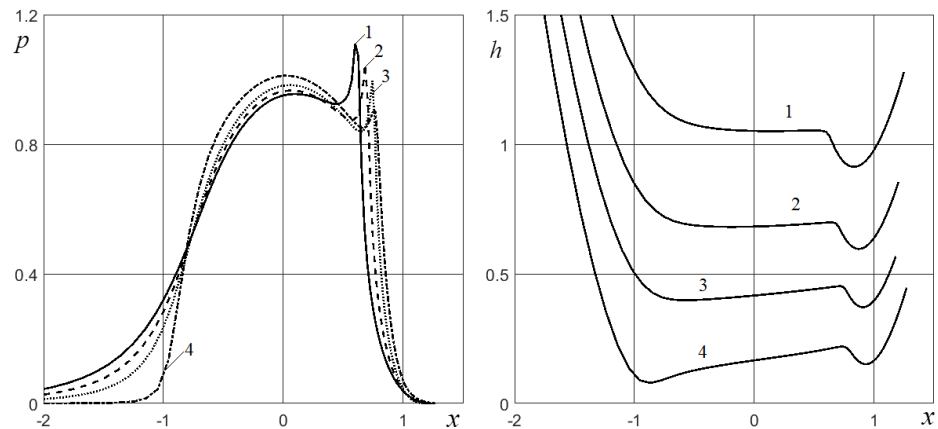


Рис. 3.2. Зависимости $p(x)$ и $h(x)$ в различные моменты безразмерного времени t .

Кривые 1 - $T = 0$, 2 - $T = 200$, 3 - $T = 320$, 4 - $T = 400$

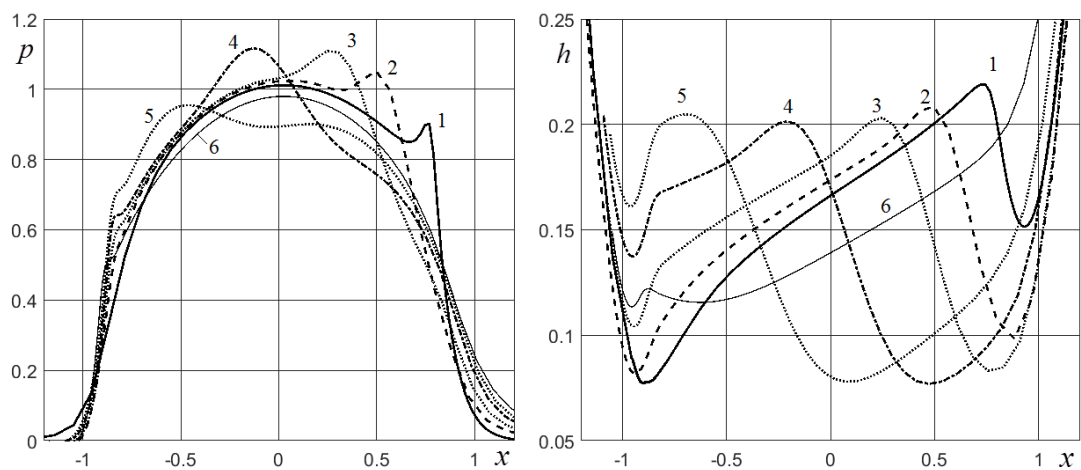


Рис. 3.3. Зависимости $p(x)$ и $h(x)$ в различные моменты безразмерного времени t .

Кривые 1 - $T = 400$, 2 - $T = 406$, 3 - $T = 411$, 4 - $T = 418$, 5 - $T = 424$, 6 - $T = 436$.

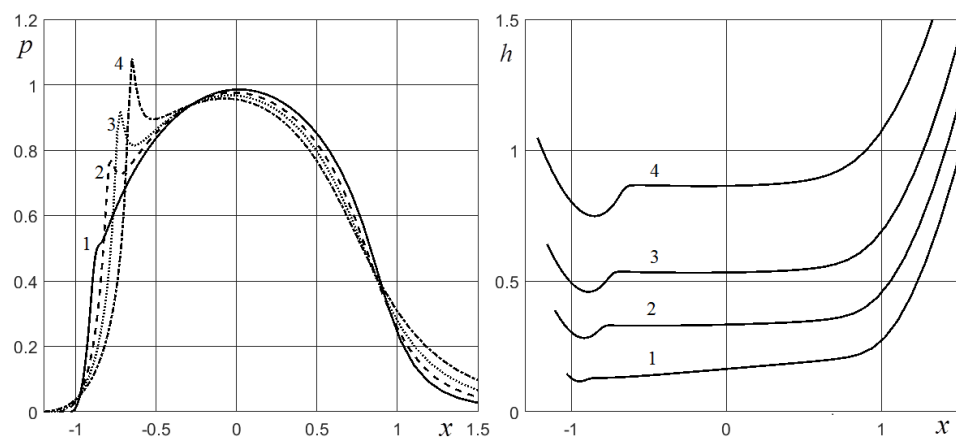


Рис. 3.4. Зависимости $p(x)$ и $h(x)$ в различные моменты безразмерного времени t .

Кривые 1 - $T = 439$, 2 - $T = 480$, 3 - $T = 550$, 4 - $T = 700$

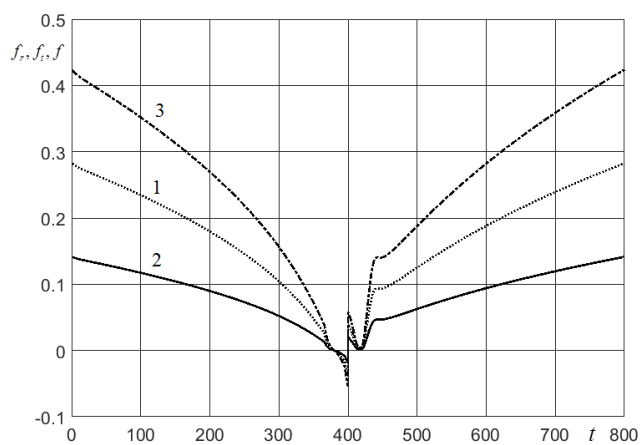


Рис. 3.5. Зависимости коэффициентов трения от безразмерного времени t . Кривая 1 - f_r , 2 - f_t , 3 - f

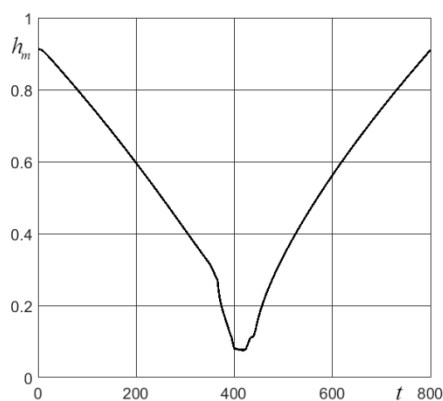


Рис. 3.6. Зависимости безразмерной минимальной толщины смазочного слоя h_m от безразмерного времени t .

Толщина смазочного слоя падает с уменьшением скорости. При этом, начиная с некоторого момента времени в области высокого давления наклон графика функции $h(x)$ становится положительным и растет. Это говорит о том, что в эти моменты становится существенным вклад сдавливания смазочной пленки в процесс формирования давления в ней. В конце периода торможения скорость падения минимальной толщины смазочного слоя возрастает (рис. 3.6). При этом давление в смазочном слое формируется только за счет сдавливания смазочной пленки. В момент времени $T = 400$, когда скорость становится равной нулю, толщина смазочного слоя на входе в область высокого давления существенно ниже ее значения на выходе из этой области. Уменьшение толщины смазочного слоя приводит к уменьшению составляющей f_t коэффициента трения (кривая 2 на рис. 3.5).

После смены направления вращения происходит перестройка формы зазора и распределения давления в смазочном слое. Этот процесс иллюстрируют результаты, приведенные на рис. 3.3. Процесс изменения формы зазора происходит в виде бегущей волны. При этом минимальная толщина смазочного слоя (рис. 3.6), практически не изменяется (изменяется незначительно). Процесс перестройки функции распределения давления происходит следующим образом. Второй максимум давления, сохранившийся при нулевой скорости, возрастает и смещается влево. Постепенно он остается единственным максимумом, а функция распределения давления принимает характерный вид, когда область входа расположена справа, а область выхода – слева. Процесс перестройки формы зазора и распределения давления в смазочном слое занимает по времени менее 10 процентов времени торможения. При перестройке формы зазора давление в смазочном слое генерируется вследствие процесса сдавливания смазочной пленки.

После процесса перестройки происходит рост толщины смазочного слоя (рис. 3.4 и рис. 3.6). При этом форма зазора постепенно принимает вид,

характерный для стационарного случая, когда вход в зазор расположен справа, а выход – слева. В функции $p(x)$ появляется второй максимум, расположенный слева от линии действия нагрузки. Этот второй максимум со временем растет и функция $p(x)$ также постепенно принимает вид, характерный для стационарного случая, когда вход в зазор расположен справа, а выход – слева.

Из приведенного решения следует, что в режиме реверсивного движения в локальном контакте возможно разделения поверхностей трения смазочным слоем необходимой толщины в течение всего периода.

3.2. Численный анализ процесса формирования смазочного слоя при движении упругих тел из состояния покоя

Пусть до момента времени $\tilde{t} = 0$ цилиндры покоятся, прижаты друг к другу силой W и контактируют в области, размер которой определяется по теории Герца. Направим ось $\tilde{x}$ вдоль общей касательной к цилиндрам в месте их контакта. Если $\tilde{b}$ - половина ширины площадки контакта тел, то контакт тел до момента времени $\tilde{t} = 0$ осуществляется по области $-\tilde{b} \leq \tilde{x} \leq \tilde{b}$.

Пусть в момент времени $\tilde{t} = 0$ цилиндры начинают равноускорено вращаться, причем скорости поверхностей в месте контакта направлены в одну сторону. Цилиндры вращаются равноускорено со скоростью $u_s = g\tilde{t}$ до тех пор, пока линейная скорость качения поверхностей не примет значения u_0 . После этого момента времени цилиндры вращаются равномерно, а линейная скорость качения поверхностей равна u_0 .

В качестве положительного направления оси x выберем направление движения поверхностей в области контакта тел.

Когда цилиндры начинают вращаться, смазочный материал увлекается движущимися поверхностями в сужающийся зазор, в области $\tilde{x} < -\tilde{b}$ в смазочном материале возникает повышенное давление, поверхности вследствие деформаций начинают удаляться друг от друга в окрестности точки $\tilde{x} = -\tilde{b}$, область сухого контакта тел начинает уменьшаться. Обозначим $\tilde{x}_m$ координату граничной точки между областью сухого контакта и областью, занимаемой смазочным слоем, а $\tilde{c}$ - координату другой (выходной) граничной точки области сухого контакта тел (рис. 3.7).

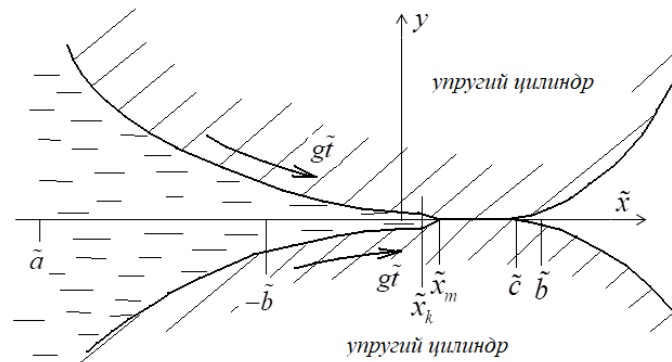


Рис. 3.7. Расчетная схема контакта тел в момент времени $t > 0$ до полного их разделения смазочным слоем.

В начальный момент времени, очевидно, $\tilde{x}_m = -\tilde{b}$, $\tilde{c} = \tilde{b}$. С началом движения поверхностей точка $\tilde{x}_m$ сдвигается вправо, а область $(-\tilde{b}, \tilde{x}_m)$ заполняется смазочным материалом. В приведенных ниже вариантах расчета выходная граница области сухого контакта тел движется навстречу входной граничной точке области сухого контакта. Рис. 3.7 изображен с учетом данного факта. Сформулируем систему уравнений, описывающих данный процесс до момента, когда поверхности перестают касаться друг друга. После того, как произойдет разделение поверхностей смазочным слоем, задача определения параметров УГД – контакта может быть решена методом, изложенным, в предыдущем пункте 3.1.

Полагаем, что в большей части области течения смазочного материала в моменты времени $\tilde{t} > 0$ выполняются условия применимости гидродинамической теории смазки. Однако в окрестности точки $\tilde{x}_m$ эти условия явно нарушаются. Более того, так как в окрестности точки $\tilde{x}_m$ толщина смазочного слоя мала, то реологические свойства смазочного материала отличаются от его объемных реологических свойств. Эти реологические свойства смазочного материала неизвестны. В связи с этим область, заполненную смазочным материалом, разобьем на две части. Полагаем, что в первой части, ограниченной известной точкой с координатой $\tilde{a}$ и точкой с неизвестной координатой $\tilde{x}_k$, выполняются условия применимости гидродинамической теории смазки. Во второй части, ограниченной точками $\tilde{x}_k$ и $\tilde{x}_m$, уравнения движения смазочного материала неизвестны. В данной работе принимаются допущения о том, что размер области $(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m)$ не меняется со временем, т. е. $\tilde{x}_m - \tilde{x}_k = \Delta = const$, и что в этой области смазочный материал движется как твердое несжимаемое тело. С учетом данных допущений уравнение для толщины смазочного слоя в этой области можно представить в виде

$$-u_m \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}, \quad \tilde{x}_k < \tilde{x} < \tilde{x}_m, \quad (3.21)$$

где $u_m = \frac{d\tilde{x}_m}{d\tilde{t}}$ - скорость движения границы между областью сухого контакта и областью смазываемого контакта. Характеристиками уравнения (3.21) являются кривые $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = u_m(\tilde{t})$ на плоскости $(\tilde{t}, \tilde{x})$. Вдоль характеристик, как это следует из уравнения (3.21), функция $\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t})$ остается постоянной. Из этого следует, что уравнение (3.21) действительно описывает движение смазочного материала на интервале $(\tilde{x}_k(\tilde{t}) = \tilde{x}_m(\tilde{t}) - \Delta, \tilde{x}_m(\tilde{t}))$ как движение твердого несжимаемого тела.

Отметим, что в работе [153] в аналогичной области вместо уравнения (3.21) использовалось уравнение

$$-u_s \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}, \quad (3.22)$$

Решением уравнения (3.22) является движение смазочного материала в некоторой окрестности точки $\tilde{x}_m$ как движение твердого несжимаемого тела со скоростью u_s . Однако, скорость движения смазочного материала в окрестности точки $\tilde{x}_m$ должна совпадать со скоростью движения самой точки $\tilde{x}_m$, то есть условие (3.21) является более точным по сравнению с условием (3.22).

Таким образом, всю область оси $\tilde{x}$, в которой ищется решение в момент времени $\tilde{t}$, разбиваем на три области (рис. 3.8). В первой области, которая распространяется от входной граничной точки смазочного слоя (точка $\tilde{a}$ на рис. 3.7) до точки $\tilde{x} = \tilde{x}_k$, считаем справедливыми предположения теории смазки.

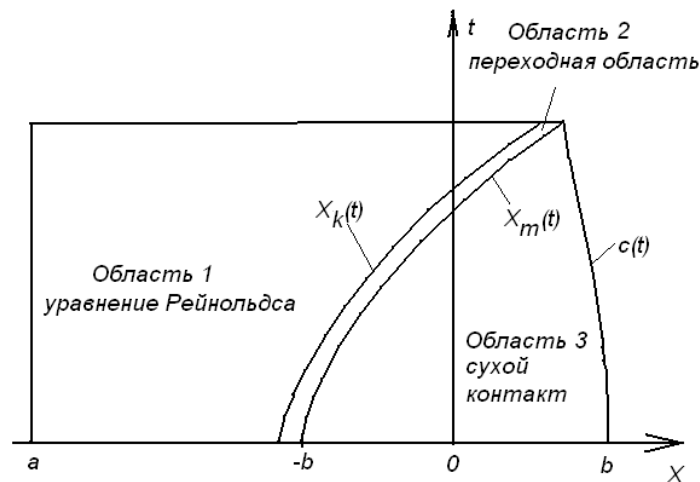


Рис. 3.8 Схема областей определения уравнений задачи

В первые моменты времени после начала движения поверхностей их скорости малы, скорости движения смазочного материала также малы, поэтому могут проявляться упругие свойства смазочного материала. Учитывая это, в качестве реологической модели смазочного материала

возьмем линейную модель Максвелла, которая в случае плоского течения имеет вид

$$\tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{t}} + \lambda u \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{x}} = \tilde{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.23)$$

Здесь λ имеет размерность времени и называется временем релаксации, $u(\tilde{x}, z)$ - скорость движения смазки, зависящая от координат $\tilde{x}$ и z , z - координата, направленная поперек смазочного слоя.

Рассмотрим случай качения без скольжения. В этом случае напряжения τ должны быть нечетной функцией z . Учитывая это, получаем

$$\tau = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} z \quad (3.24)$$

При чистом качении скорость жидкости u должна быть четной функцией координаты z . Представим функцию $u(x, z)$ в виде степенного ряда по переменной z :

$$u = u_1 + u_2 z^2 + u_4 z^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k} z^{2k} \quad (3.25)$$

В изотермическом случае вязкость μ не зависит от координаты z . Подставляя выражения (3.24) и (3.25) в уравнение (3.23) и приравнивая коэффициенты при степенях z в левой части полученного соотношения соответствующим коэффициентам в правой части, получаем

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\lambda}{\tilde{\mu}} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} + \beta u_1 = 2u_2 \quad (3.26)$$

$$u_{2n+2} = \frac{\beta}{2n+2} u_{2n}, \quad n=1, 2, \dots \quad (3.27)$$

где $\beta = \frac{\lambda}{\tilde{\mu}} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{x}^2}$. Из уравнений (3.27) следует, что

$$u_{2n+2} = \frac{\beta^n u_2}{(2n+2)[2(n-1)+2] \dots (2 \cdot 1 + 2)}, \quad n=1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Подставляя выражения (3.28) в уравнение (3.25) и суммируя, получаем

$$u = u_1 + u_2 \frac{2}{\beta} \left[\exp\left(\frac{\beta z^2}{2}\right) - 1 \right] \quad (3.29)$$

При $z = \pm \frac{\tilde{h}}{2}$ скорость жидкости u равна скорости поверхностей u_r , то есть

$$u_1 + \frac{2}{\beta} \left(\exp \left(\frac{\beta h^2}{8} \right) - 1 \right) u_2 = u_s \quad (3.30)$$

Решая уравнения (3.26) и (3.30) относительно u_1 , u_2 и подставляя полученные выражения в (3.29), получаем

$$u = u_s \exp \left[\frac{\beta}{2} \left(z^2 - \frac{\tilde{h}^2}{4} \right) \right] + \frac{1}{\tilde{\mu}\beta} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \lambda \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} \right) \left\{ \exp \left[\frac{\beta}{2} \left(z^2 - \frac{\tilde{h}^2}{4} \right) \right] - 1 \right\} \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует выражение для потока смазочного материала

$$\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \rho \int_{-\frac{\tilde{h}}{2}}^{\frac{\tilde{h}}{2}} u d\tilde{y} = -\frac{3}{2} \frac{\left(1 - \Psi \left(\frac{\beta \tilde{h}^2}{8} \right) \right)}{\left(\frac{\beta \tilde{h}^2}{8} \right)} \frac{\tilde{\rho} \tilde{h}^3}{12\tilde{\mu}} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \lambda \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} \right) + \Psi \left(\frac{\beta \tilde{h}^2}{8} \right) g \tilde{t} \tilde{\rho} \tilde{h} \quad (3.32)$$

где $\Psi(z) = \int_0^1 \exp \left[z(\xi^2 - 1) \right] d\xi$.

Уравнение неразрывности для тонкого смазочного слоя имеет вид [12]

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{h})}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad (3.33)$$

Таким образом, в случае линейной модели Максвелла уравнение неразрывности имеет вид (3.33), где поток $q(x, t)$ определяется по формуле (3.32).

Если $\lambda \rightarrow 0$ то $\beta \rightarrow 0$, $\Psi \rightarrow 1$, $\left[\frac{3}{2} \frac{\left(1 - \Psi \left(\frac{\beta \tilde{h}^2}{8} \right) \right)}{\left(\frac{\beta \tilde{h}^2}{8} \right)} \right] \rightarrow 1$, $q(x, t) \rightarrow -\frac{\tilde{\rho} \tilde{h}^3}{12\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + u_s \tilde{\rho} \tilde{h}$ и

уравнения (3.32), (3.33) сводятся к уравнению Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\tilde{\rho} \tilde{h}^3}{12\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right) - g \tilde{t} \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{h}}{\partial \tilde{t}}, \quad \tilde{a} < \tilde{x} < \tilde{x}_k, \quad 0 < \tilde{t} < \frac{u_0}{g}.$$

Во второй области, которая распространяется от точки $\tilde{x} = \tilde{x}_k = \tilde{x}_m - \Delta$ до точки, зазор определяется из условия движения твердого тела постоянной формы, занимающего переходную область, т. е.

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{(\tilde{x} - \tilde{x}_m(\tilde{t}) - \tilde{b})^2 - \tilde{b}^2}{2R} + \frac{4}{\pi E'} p_g \int_{-\tilde{b}}^{\tilde{b}} \sqrt{1 - \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{b}}\right)^2} \ln \frac{\tilde{b} - \xi}{\left|\xi - (\tilde{x} - \tilde{x}_m(\tilde{t}) - \tilde{b})\right|} d\xi, \quad \tilde{x}_k \leq \tilde{x} < \tilde{x}_m$$

В третьей области, которая распространяется от точки $\tilde{x} = \tilde{x}_m$ до выходной граничной точки $\tilde{x} = \tilde{c}$ области контакта, осуществляется сухой контакт тел.

Условие контакта тел на отрезке $[\tilde{x}_m, \tilde{c}]$ при этом можно записать в виде

$$\frac{\tilde{x}^2 - \tilde{c}(\tilde{t})^2}{2R} + \frac{4}{\pi E'} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{c}(\tilde{t})} \tilde{p}(\xi, \tilde{t}) \ln \frac{\tilde{c}(\tilde{t}) - \xi}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi = 0, \quad \tilde{x}_m \leq \tilde{x} < \tilde{c}. \quad (3.34)$$

Зазор между поверхностями на отрезке $[\tilde{a}, \tilde{x}_m]$ можно представить следующим образом

$$\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{c}(\tilde{t})^2}{2R} + \frac{4}{\pi E'} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{c}(\tilde{t})} \tilde{p}(\xi, \tilde{t}) \ln \frac{\tilde{c}(\tilde{t}) - \xi}{|\xi - \tilde{x}|} d\xi, \quad \tilde{a} \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_m.$$

Потребуем непрерывность потока смазочного материала на границе $\tilde{x} = \tilde{x}_k$ между областями 1 и 2, т. е. выполнения условия

$$\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{t})|_{\tilde{x}=\tilde{x}_k-0} = u_m \tilde{h}(\tilde{x}_k, \tilde{t})$$

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{\tilde{x}}{b}, \quad h = \frac{2\tilde{h}R}{b^2}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{p_g}, \quad t = \tilde{t} \sqrt{\frac{g}{b}}, \quad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \quad q = \frac{96R^3 \mu_0}{p_g \rho_0 b^5} \tilde{q}$$

В безразмерных переменных уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + V \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0, \quad a < x < x_k(t), \quad t > 0 \quad (3.35)$$

$$q(x, t) = - \frac{\left(1 - \Psi\left(\frac{3 D_e}{2 V} \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)\right)}{\frac{D_e}{V} \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \frac{\rho h^3}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + D_e \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}\right) + \Psi\left(\frac{3 D_e}{2 V} \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) V t \rho h \quad (3.36)$$

$$x^2 - c(t)^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^{c(t)} p(\xi, t) \ln \frac{c(t) - \xi}{|\xi - x|} d\xi = 0, \quad x_m(t) \leq x \leq c(t), \quad t > 0 \quad (3.37)$$

$$h(x, t) = x^2 - c(t)^2 + \frac{2}{\pi} \int_a^{c(t)} p(\xi, t) \ln \frac{c(t) - \xi}{|\xi - x|} d\xi, \quad a \leq x \leq x_k(t), \quad t \geq 0 \quad (3.38)$$

$$h(x, t) = (x - x_m(t) - 1)^2 + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} \ln \frac{1 - \xi}{|\xi - x + x_m(t) + 1|} d\xi, \quad x_k \leq x \leq x_m, \quad t \geq 0 \quad (3.39)$$

$$\mu = \exp(Gp), \quad \rho = 1 + \frac{C_1 p}{1 + C_2 p}, \quad x_m - x_k = \bar{\Delta} = \text{const}, \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{\tilde{b}} \quad (3.40)$$

$$\int_a^c p(x, t) dx = \frac{\pi}{2}, \quad t \geq 0 \quad (3.41)$$

Здесь $V = \frac{48\mu_0 R^2}{p_g b^2} \sqrt{\frac{g}{b}}$, $D_e = \lambda \sqrt{\frac{g}{b}}$ число Деборы, $\Psi(x) = \int_0^1 \exp(x(\xi^2 - 1)) d\xi$. Граничные

условия для давления, а также условие непрерывности давления и потока смазочного материала имеют вид

$$p(a, t) = 0, \quad p(c, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.42)$$

$$p(x, t) \Big|_{x=x_k-0} = p(x, t) \Big|_{x=x_k+0}, \quad p(x, t) \Big|_{x=x_m-0} = p(x, t) \Big|_{x=x_m+0}, \quad t > 0 \quad (3.43)$$

$$\left\{ -\frac{\rho h^3}{\mu} \left[\frac{1 - \Psi\left(\frac{3}{2} \frac{D_e}{V} \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)}{\frac{D_e}{V} \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \right] \left(\frac{\partial p}{\partial x} + D_e \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \right) + V t \Psi\left(\frac{3}{2} \frac{D_e}{V} \frac{h^2}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) \rho h \right\} \Big|_{x=x_k-0} = \quad (3.44)$$

$$= V \frac{dx_k}{dt} \rho(x_k, t) h(x_k, t), \quad t > 0$$

В случае линейной модели Максвелла поток q зависит от производной $\partial^2 p / \partial x^2$, поэтому левая часть уравнения (3.35) зависит от производной $\partial^3 p / \partial x^3$. Это означает, что для того, чтобы решение задачи было единственным необходимо еще одно граничное условие для давления $p(x, t)$. Это условие можно получить следующим образом.

Третья производная давления появляется в уравнении (3.35) из-за конвективного члена $\lambda u \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{x}}$ в уравнении (3.23). Из (3.36) следует, что влияние конвективного члена на решение задачи невелико, если выполняется условие $h \ll 1$. В процессе формирования смазочного слоя до разделения поверхностей данное условие выполняется. Из (3.36) следует также, что при

слабом влиянии конвективного члена на решение задачи слабо влияет на решение задачи и производная $\partial^2 p / \partial x^2$. Поэтому в качестве недостающего граничного условия для давления можно принять условие

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad (3.45)$$

В начальный момент времени давление определяется из решения задачи о сухом контакте тел.

Уравнения и условия (3.35) – (3.45) однозначно определяют функции $x_k(t), x_m(t), c(t)$ ($t \geq 0$), $p(x, t)$ в области $a \leq x \leq c(t)$, $h(x, t)$ в области $0 \leq x \leq x_m(t)$. Функция $h(x, t) = 0$ в области $x_m(t) \leq x \leq c(t)$.

Метод численного решения системы уравнений. Пусть функции $x_k(t), x_m(t), c(t), p(x, t), h(x, t)$ и $S(x, t) = \partial(\rho h) / \partial t$ известны в момент времени $t = t_{I-1}$. Отметим, что в начальный момент времени $S(x, 0) = 0$. Вычислять эти функции в момент времени $t = t_I = t_{I-1} + \Delta t$ будем следующим образом.

Присвоим переменным $x_k(t), x_m(t), c(t)$ приближенные значения в момент времени $t = t_I$, т. е. определим $x_k^I = x_k(t_I)$, $x_m^I = x_m(t_I)$, $c^I = c(t_I)$. Введем три равномерных сетки в областях $[a, x_k^I]$, $[x_k^I, x_m^I]$, $[x_m^I, c^I]$. Эти три сетки образуют сетку $[x_0 = a, x_1, \dots, x_N = x_N^I = x_k^I, \dots, x_M = x_M^I = x_m^I, \dots, x_K = c^I]$ на отрезке $[a, c^I]$. Заменяем производные конечными разностями, а интегралы в уравнениях (3.37) – (3.39), (3.41) – конечными суммами.

В уравнение (3.35) принимаем $t = t_I$ и интегрируем его по переменной x по интервалу $\left[x_{j-\frac{1}{2}}^I, x_{j+\frac{1}{2}}^I \right]$, $x_{j-\frac{1}{2}}^I = \frac{1}{2}(x_{j-1}^I + x_{j+1}^I)$, $x_{j+\frac{1}{2}}^I = \frac{1}{2}(x_j^I + x_{j+1}^I)$. В результате получаем систему уравнений

$$q_{j+\frac{1}{2}}^I - q_{j-\frac{1}{2}}^I + \frac{\Delta x^I}{8} V(S_{j-1}^I + 6S_j^I + S_{j+1}^I) = 0, j = 1, 2, \dots, N-2, \quad (3.46)$$

$$q_{j\pm\frac{1}{2}}^I = q\left(x_{j\pm\frac{1}{2}}^I\right), \quad \Delta x^I = x_1^I - x_0^I$$

$$q_N^I - q_{(N-1)-\frac{1}{2}}^I + \frac{\Delta x}{8} V(S_{N-2}^I + 7S_{N-1}^I + 4S_N^I) = 0 \quad (3.47)$$

$$q_{j+\frac{1}{2}}^I = \rho_{j+\frac{1}{2}}^I \left(h_{j+\frac{1}{2}}^I \right)^3 \frac{1 - \Psi\left(\frac{3}{2}\alpha_{j+\frac{1}{2}}^I\right)}{\alpha_{j+\frac{1}{2}}^I} \frac{1}{\Delta x^I} \left\{ \frac{1}{G} \left(1 + \frac{D_e}{\Delta t^I} \right) \left[\exp(-Gp_{j+1}^I) - \exp(-Gp_j^I) \right] + \right. \\ \left. + \frac{D_e}{\Delta t^I} \exp(-Gp_{j+\frac{1}{2}}^I) (p_{j+1}^{I-1} - p_j^{I-1}) \right\} + V t_I \rho_{j+\frac{1}{2}}^I h_{j+\frac{1}{2}}^I \Psi\left(\frac{3}{2}\alpha_{j+\frac{1}{2}}^I\right) \quad (3.48)$$

$$q_N^I = \rho_N^I (h_N^I)^3 \frac{1}{\Delta x^I} \left\{ \frac{1}{G} \left(1 + \frac{D_e}{\Delta t^I} \right) \left[\exp(-Gp_N^I) - \exp(-Gp_{N-1}^I) \right] + \right. \\ \left. + \frac{D_e}{\Delta t^I} \exp(-Gp_N^I) (p_N^{I-1} - p_{N-1}^{I-1}) \right\} + V t_I \rho_N^I \rho_N^I \quad (3.49)$$

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^I = 0.5(\rho_j^I + \rho_{j+1}^I), h_{j+\frac{1}{2}}^I = 0.5(h_j^I + h_{j+1}^I), \rho_j^I = \rho(t_I, x_j^I), h_j^I = h(t_I, x_j^I), p_j^I = p(t_I, x_j^I),$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}}^I = \frac{D_e}{2V(\Delta x^I)^2} \left(h_{j+\frac{1}{2}}^I \right)^2 \exp(-Gp_{j+\frac{1}{2}}^I) (p_{j+2}^I - p_{j+1}^I - p_j^I + p_{j-1}^I), \quad j = 1, 2, \dots, N-2$$

$$\alpha_{\frac{1}{2}}^I = \frac{D_e}{V(\Delta x^I)^2} \left(h_{\frac{1}{2}}^I \right)^2 \exp(-Gp_{\frac{1}{2}}^I) (p_2^I - 2p_1^I + p_0^I)$$

Равенства (3.50) использовались при выводе (3.48), (3.49).

$$\exp(-Gp) \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} \Big|_{t=t_I} = \frac{1}{\Delta t^I} \exp(-Gp^I) \left(\frac{dp^I}{dx} - \frac{dp^{I-1}}{dx} \right) = \\ = -\frac{1}{\Delta t^I} \left(\frac{1}{G} \frac{d}{dx} \exp(-Gp^I) + \exp(-Gp^I) \frac{dp^{I-1}}{dx} \right) \quad (3.50)$$

$$\rho_j^I h_j^I - \rho(x_j^I, t_{I-1}) h(x_j^I, t_{I-1}) - \frac{1}{2} [S_j^I + S(x_j^I, t_{I-1})] \Delta t_I = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.51)$$

$$\frac{(x_j^I)^2 - (c^I)^2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^K p_k^I [g_k(x_j^I) - g_k(c^I)] - H_j = 0, \quad j = N, N+1, \dots, M-1 \quad (3.52)$$

$$\frac{(x_j^I)^2 - (c^I)^2}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^K p_k^I [g_k(x_j^I) - g_k(c^I)] = 0, \quad j = M, M+1, \dots, K-1 \quad (3.53)$$

$$h_j^I - \frac{(x_j^I)^2 - (c^I)^2}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^K p_k^I [g_k(x_j^I) - g_k(c^I)] = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.54)$$

$$\frac{(h_N^I)^2}{(x_N^I - x_{N-1}^I)} \left\{ \frac{1}{G} \left(1 + \frac{D_e}{\Delta t_I} \right) \left[\exp(-Gp_N^I) - \exp(-Gp_{N-1}^I) \right] + \frac{D_e}{\Delta t_I} \exp(-Gp_N^I) (p_N^I - p_{N-1}^I) \right\} -$$

$$-V \left(\frac{x_N^I - x_N^{I-1}}{\Delta t_I} - t_I \right) = 0 \quad (3.55)$$

$$p_0^I = 0, p_K^I = 0 \quad (3.56)$$

$$\sum_{j=1}^K (p_j^I + p_{j-1}^I) (x_j^I - x_{j-1}^I) - \pi = 0 \quad (3.57)$$

$$x_M^I - x_N^I = \Delta \quad (3.58)$$

где $g_k^I(x) = A_k^{1,I}(x) + A_k^{2,I}(x) + B_k^{1,I}(x) + B_k^{2,I}(x)$, $k = 0, 1, \dots, K$, $A_0^{1,I}(x) = 0$, $B_K^{2,I}(x) = 0$,

$$A_k^{1,I}(x) = \frac{1}{x_k^I - x_{k-1}^I} \left[F_2(x_k^I - x) - F_2(x_{k-1}^I - x) \right], \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$A_k^{2,I}(x) = \frac{x - x_{k-1}^I}{x_k^I - x_{k-1}^I} \left[F_1(x_k^I - x) - F_1(x_{k-1}^I - x) \right], \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

$$B_k^{1,I}(x) = \frac{x_{k+1}^I - x}{x_{k+1}^I - x_k^I} \left[F_1(x_{k+1}^I - x) - F_1(x_k^I - x) \right], \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

$$B_k^{2,I}(x) = -\frac{1}{x_{k+1}^I - x_k^I} \left[F_2(x_{k+1}^I - x) - F_2(x_k^I - x) \right], \quad k = 0, 1, \dots, K-1,$$

$$F_1(x) = x(\ln|x| - 1), \quad F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \right)$$

Уравнения (3.46), (3.47), где $q_{j+\frac{1}{2}}^I, q_N^I$ определяются по формулам (3.48), (3.49),

а также уравнения (3.51) – (3.59) представляют собой систему $K + 2N + 5$ уравнений относительно $K + 2N + 5$ неизвестных

$x_N^I, x_M^I, c^I, p_0^I, \dots, p_K^I, h_0^I, \dots, h_{N-1}^I, S_0^I, \dots, S_N^I$. Входными параметрами являются: $V, D_e, G, \bar{\Delta}, C_1, C_2, a$.

Данная система уравнений решается методом Ньютона – Рафсона.

Анализ результатов численного моделирования. Ниже приведены результаты расчетов при следующих постоянных значениях параметров: $G = 7$, $C_1 = 0.24$, $C_2 = 0.68$. Данные значения параметров близки к значениям, при которых проводились экспериментальные исследования в работе [99]. Приведенные ниже результаты получены при различных значениях

параметров V , D_e , $\bar{\Delta}$. Это позволяет исследовать влияние реологических свойств смазки и размера переходной зоны на процесс формирования смазочного слоя.

На рис. 3.9 представлены зависимости $h(x)$, полученные при значениях параметров $D_e = 0.1$, $V = 0.005$, $\bar{\Delta} = 0.005$, $\bar{\Delta} = 0.01$, $\bar{\Delta} = 0.02$, $\bar{\Delta} = 0.03$, $\bar{\Delta} = 0.04$, в различные моменты безразмерного времени t .

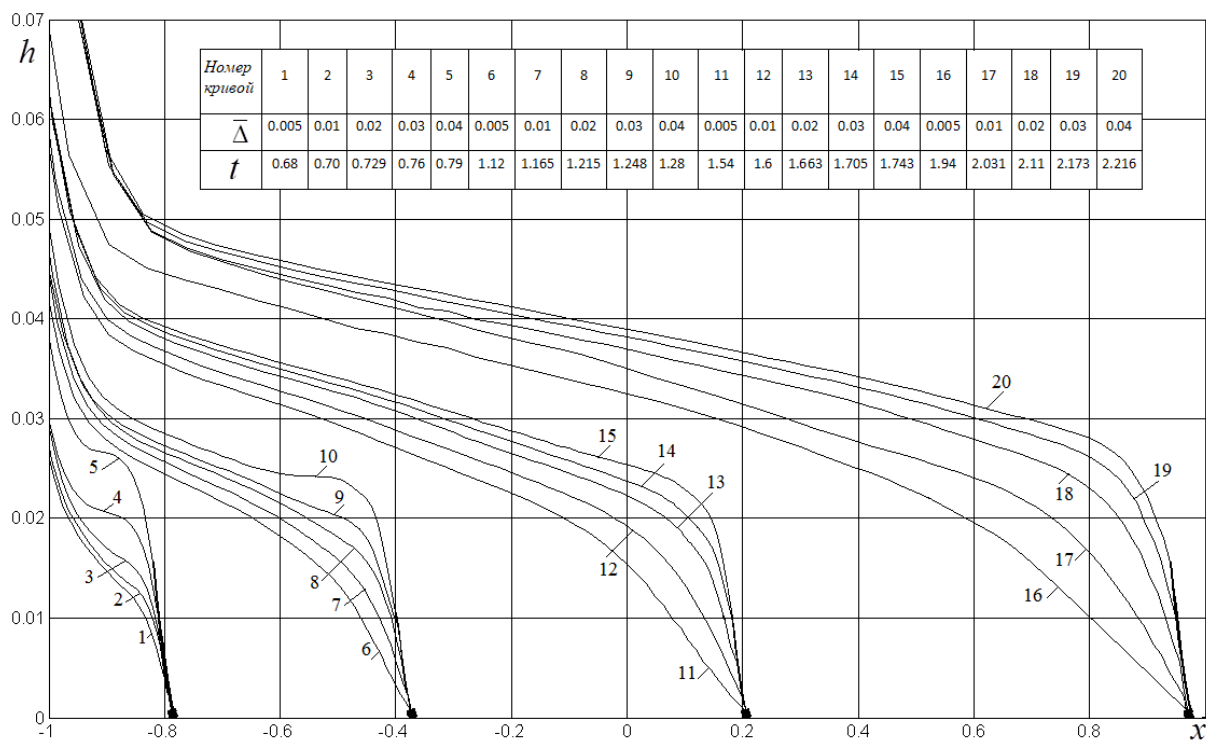


Рис. 3.9.

В переходной зоне, в которой смазочный материал моделируется как несжимаемое твердое тело, кривые нанесены толстыми линиями для случаев $\bar{\Delta} = 0.005$ и $\bar{\Delta} = 0.04$. Для случая $\bar{\Delta} = 0.005$ толстыми линиями обозначены переходные зоны при всех временах t . Для случая $\bar{\Delta} = 0.04$ переходные зоны обозначены на кривых 5 и 20.

На каждом графике на рис. 3.9 могут быть выделены три характерные области.

Первая область - это левая окрестность граничной точки $x = c$. При перемещении из этой точки влево толщина смазочного слоя быстро

увеличивается. Модуль производной $\left| \frac{dh}{dx} \right|$ изменяется незначительно, т. е. рост толщины h близок к линейному росту.

Далее модуль производной $\left| \frac{dh}{dx} \right|$ быстро убывает и начинается вторая область, в которой рост толщины h опять близок к линейному росту, но со значительно более низкой скоростью. Далее при движении влево $\left| \frac{dh}{dx} \right|$ быстро возрастает и начинается третья область, в которой толщина h быстро возрастает при высоком значении модуля производной $\left| \frac{dh}{dx} \right|$.

Назовем первую область областью фронта смазочного материала. Этот фронт формируется в течение некоторого времени после начала движения поверхностей и движется вправо.

При высоких значениях ширины переходной области ($\bar{\Delta} \geq 0.03$) при движении вправо высота и крутизна фронта длительное время не изменяются и только незадолго до разделения поверхностей высота фронта немного увеличивается. Это движение аналогично движению фронта, полученному в эксперименте в работе [99].

На рисунке 3.9 видно, что только небольшая часть фронта является жесткой при значении $\bar{\Delta} = 0.005$. Это означает, что при малых значениях ширины переходной зоны высота фронта определяется, в основном, реологическими свойствами жидкой смазки. С увеличением размера переходной зоны жесткая часть фронта возрастает, а жидкая уменьшается. Однако значительная часть фронта (не менее половины) остается жидкой при наибольшем значении параметра $\bar{\Delta} = 0.04$. В начальные моменты движения ($c < -0.8$) крутизна формируемого фронта слабо зависит от размера переходной области, но высота фронта увеличивается более чем в два раза при возрастании $\bar{\Delta}$ от 0.005 до 0.04.

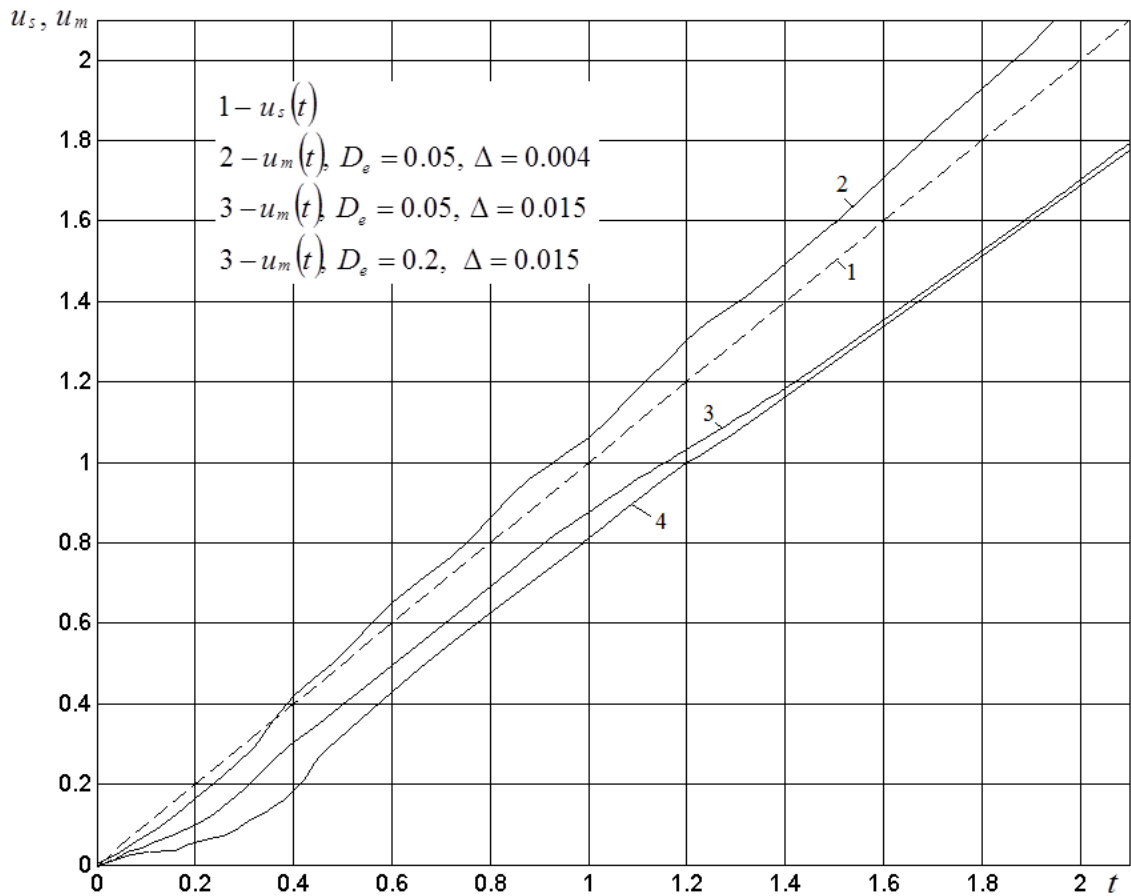


Рис. 3.10.

На рис. 3.10 приведена зависимость безразмерной скорости качения

$u_s = \frac{g\tilde{t}}{\sqrt{bg}} = t$ (пунктирная кривая 1) и безразмерной скорости фронта

$u_m = \frac{d\tilde{x}_m/d\tilde{t}}{\sqrt{bg}} = \frac{dx_m}{dt}$ от безразмерного времени t при различных значениях

параметров D_e и $\bar{\Delta}$. Эти зависимости иллюстрируют влияние ширины переходной области и вязкоупругих свойств смазки на скорость фронта.

Из приведенных на рис. 3.10 результатов расчетов следует, что после начала движения скорость фронта ниже скорости качения. Аналогичный результат получен в эксперименте в работе [99]. При высоких значениях ширины переходной области ($\bar{\Delta} = 0.015$) скорость фронта остается ниже скорости качения вплоть до разъединения поверхностей. При значении $\bar{\Delta} = 0.004$ скорость фронта, возрастая, доходит до скорости качения и затем превышает ее.

На рисунке 3.10 также видно, что скорость фронта уменьшается как с увеличением ширины переходной зоны, так и с увеличением числа Дебори. Это уменьшение наиболее значительно в начале движения. Уменьшение скорости фронта вязкоупругой смазки связано с релаксацией напряжений. Из-за релаксации напряжений рост давления в левой окрестности точки $x = x_k$ замедляется. Это приводит к задержке перемещения поверхностей в этой окрестности и, соответственно, к задержке формирования фронта смазки и уменьшению скорости фронта. Когда ширина переходной зоны увеличивается, поток смазки на границе $x = x_k$ также увеличивается. Более высокий расход может быть обеспечен только при более высокой скорости движения поверхностей. В результате формирование фронта запаздывает, и скорость фронта уменьшается при увеличении ширины переходной области. Рис. 3.11 и 3.12 иллюстрируют влияние упругости смазки на толщину смазочного слоя при его формировании. Результаты получены при значении ширины переходной области $\bar{\Delta} = 0.015$ и при различных значениях параметров D_e и t . На рис. 3.11 кривые получены при $V = 0.002$, а на рис. 3.12 – при $V = 0.005$.

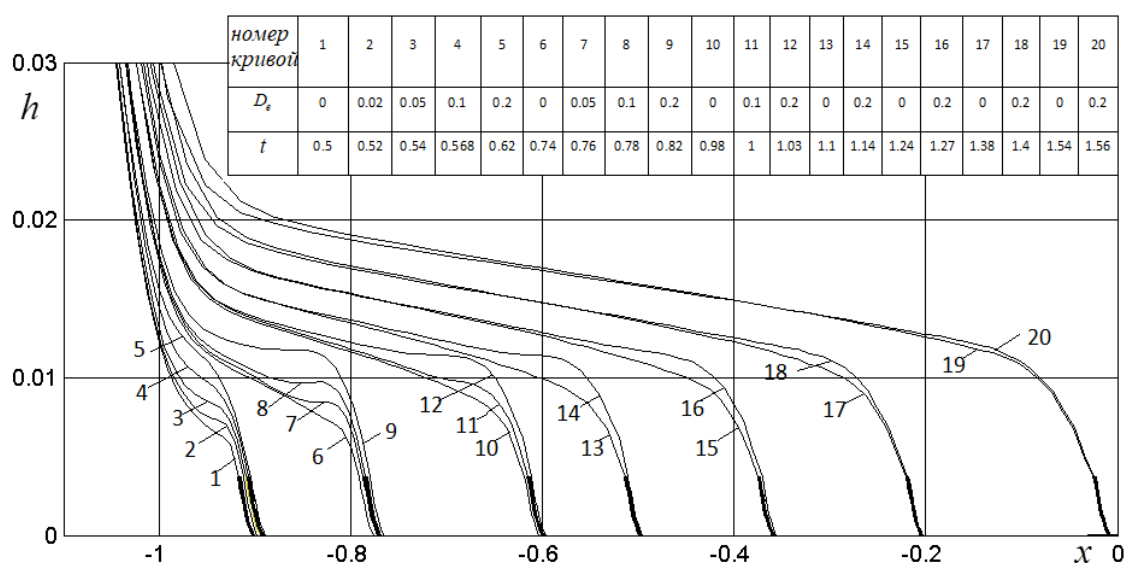


Рис. 3.11

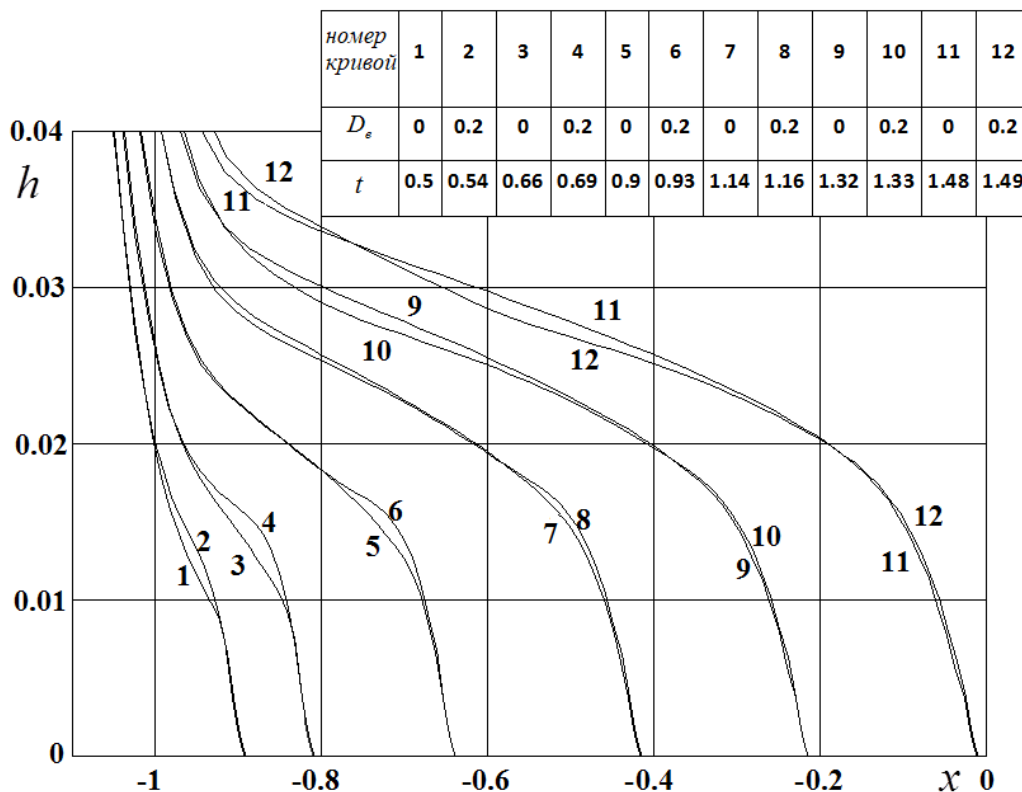


Рис. 3.12

Кривые 1, 6, 10, 13, 15, 17 и 19 получены при значении $D_e = 0$, т. е. при отсутствии упругих свойств смазки. Кривая 2 получена при значении $D_e = 0.02$, кривые 3, 7 получены при значении $D_e = 0.05$, кривые 4, 8, 11 получены при значении $D_e = 0.1$ и кривые 5, 9, 12, 14, 16, 18, 20 получены при значении $D_e = 0.2$.

Из результатов расчетов, приведенных на рисунке 3.11, следует, что вязкоупругость слабо влияет на крутизну фронта на протяжении всего перемещения фронта через контакт.

В начале движения ($s \approx -0.9$) высота фронта сильно зависит от числа Деборы. При изменении D_e от 0 до 0,2 высота фронта увеличивается более чем в два раза, и в момент разделения поверхности эффект вязкоупругости незначителен.

Увеличение высоты передней части в начале движения с увеличением числа Деборы связано с ослаблением напряжений в смазочном материале.

Процессы релаксации в вязкоупругой жидкости приводят к задержке формирования фронта. В результате формирование фронта происходит при более высокой скорости движения поверхностей. Более высокая скорость качения соответствует более высокому расходу смазки и большей высоте передней части фронта.

При $D_e = 0.2$ высота фронта незначительно изменяется со временем. При значении $D_e = 0$ высота фронта значительно возрастает при его продвижении, и в момент разделения поверхностей она имеет то же значение, что и при значении $D_e = 0.2$.

На рисунке 3.12 показаны аналогичные результаты для случая $V = 0.005$. Эти результаты указывают на то, что влияние вязкоупругости на толщину пленки при $V = 0.005$ значительно слабее, чем при $V = 0.002$. Разница в высоте фронта имеет место до времени $t = 0.9$, когда $c = -0.6$.

Таким образом, с увеличением значения параметра V влияние вязкоупругости на толщину смазочного слоя ослабевает.

На рис. 3.13 приведены распределение давления по области контакта в различные моменты времени при значениях параметров $V = 0.002$, $D_e = 0.2$, $\bar{\Delta} = 0.015$.

Из приведенных результатов следует, что распределение давления по области контакта вплоть до разделения поверхностей близко к распределению давления при сухом контакте тел. Исключением является область входа (окрестность точки $x = -1$), а также переходная зона и некоторые окрестности ее граничных точек.

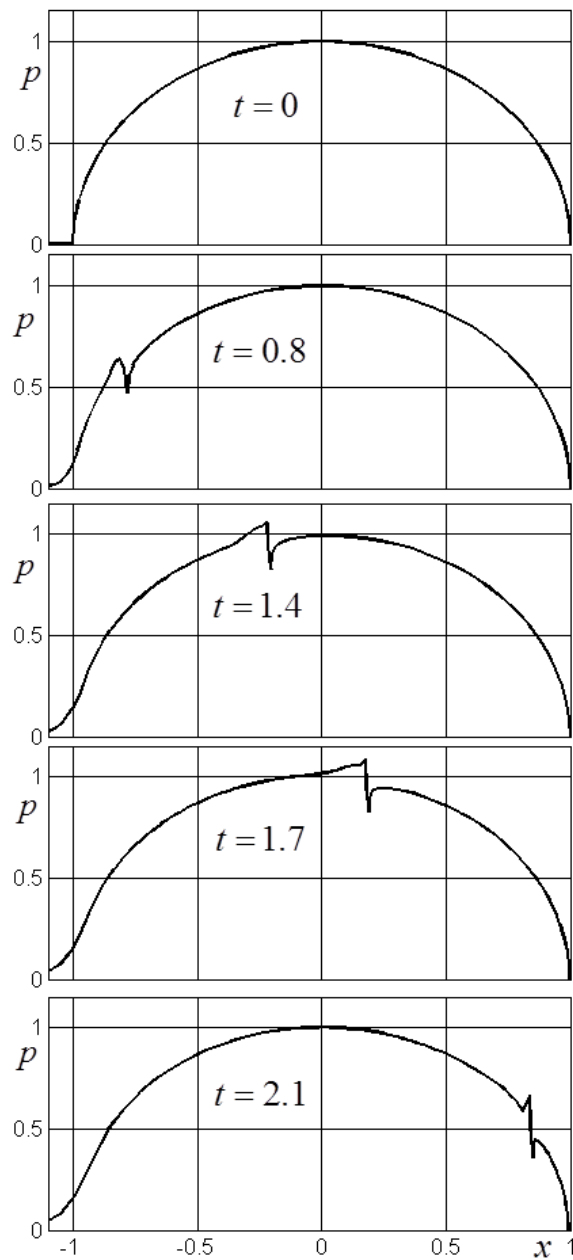


Рис. 3.13

Во входной области давление постепенно увеличивается при перемещении фронта, и становится таким же, как в УГД контакте. В области фронта толщина пленки быстро падает, что приводит к росту давления в левой окрестности точки $x = x_k$.

В переходной зоне давление падает от локального максимума в точке $x = x_k$ до локального минимума в точке $x = x_m$.

3.3. Численный анализ переходных процессов в неметаллическом подшипнике скольжения при реверсивном движении

Подшипники жидкостного трения работают также и в реверсивном режиме. Например, опорные подшипники жидкостного трения реверсивных прокатных станов [49, 50]. В таких подшипниках скорость скольжения периодически принимает нулевое значение. Однако толщина смазочного слоя может оставаться ненулевой в течение всего периода реверсивного движения. При этом существенную роль в поддержании режима жидкостного трения могут оказывать деформации тел. Деформации тел могут обеспечить необходимую для жидкостного режима толщину смазочного слоя в периоды времени, когда скорость мала.

Рассмотрим подшипник скольжения с тонким вкладышем, когда перемещение поверхности вкладыша вследствие его деформаций в какой-либо точке поверхности пропорциональны давлению со стороны смазочного слоя в этой же точке и не зависят от давления в других точках поверхности вкладыша. Смазка предполагается Ньютонской.

Схема подшипника приведена на рис.3.14.

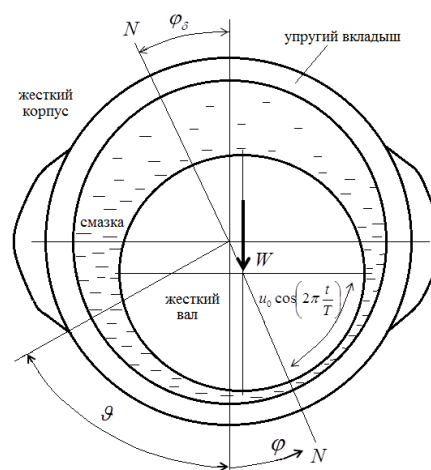


Рис. 3.14.

Распределение давления в смазочном слое определяем из нестационарного уравнения Рейнольда, которое применительно к рассматриваемой задаче запишем в виде

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tilde{\rho} \tilde{h}^3}{12 \tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} \right) - \frac{u}{2R} \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{h})}{\partial \varphi} = \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{h})}{\partial \tilde{t}}$$

Изменение скорости со временем примем в виде

$$u = u_0, \tilde{t} \leq 0$$

$$u = u_0 \cos \left(\frac{2\pi \cdot \tilde{t}}{T} \right), \tilde{t} > 0$$

где T - период реверсивного движения. Выражение для толщины смазочного слоя запишем в виде

$$\tilde{h}(\varphi, \tilde{t}) = \Delta - \delta(\tilde{t}) \cos(\varphi - \varphi_\delta(\tilde{t})) + \varepsilon \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \tilde{p}(\varphi, \tilde{t})$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$\tilde{p}(-\vartheta) = \tilde{p}(\varphi_c) = 0, \quad 0 < \varphi_c \leq \vartheta, \quad \left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \quad \text{при } u \geq 0$$

$$\tilde{p}(\varphi_c) = \tilde{p}(\vartheta) = 0, \quad -\vartheta \leq \varphi_c < 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \quad \text{при } u < 0$$

где φ_c - координата точки обрыва смазочного слоя. Координата φ_c неизвестна и определяется в процессе решения задачи.

Условия равновесия вала имеют вид

$$R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\tilde{p} \cos \varphi - \tilde{\tau} \sin \varphi) d\varphi = W, \quad R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\tilde{p} \sin \varphi + \tilde{\tau} \cos \varphi) d\varphi = 0$$

где W - нагрузка на единицу длины вала, $\tilde{\tau} = \tilde{\mu} \frac{u}{\tilde{h}} + \frac{\tilde{h}}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi}$ - касательные напряжения, действующие со стороны смазочного слоя на вал, $\varphi_1 = -\vartheta$, $\varphi_2 = \varphi_c$ при $u \geq 0$ и $\varphi_1 = \varphi_c$, $\varphi_2 = \vartheta$ при $u < 0$.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$h = \frac{\tilde{h}}{\Delta}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{p_0}, \quad p_0 = \frac{6\mu_0 u_0 R}{\Delta^2}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \quad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0}, \quad t = 2\pi \frac{\tilde{t}}{T}$$

В безразмерных переменных уравнения задачи и граничные условия запишутся в виде

$$h(\varphi, t) = 1 - \chi(t) \cos \varphi + \alpha p(\varphi, t) \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) - \cos t \frac{\partial(\rho h)}{\partial \varphi} = V_1 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t}$$

$$\rho = 1 + \frac{K_1 p}{1 + K_2 p}, \quad \mu = \exp(Gp) \quad (3.60)$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (p \cos \varphi - \tau \sin \varphi) d\varphi = P, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (p \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\varphi = 0$$

$$p(-\vartheta) = p(\varphi_c) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \text{ при } \cos t \geq 0$$

$$p(\varphi_c) = p(\vartheta) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \text{ при } \cos t < 0$$

где $\chi = \frac{e}{\Delta}$ - относительный эксцентриситет, $\alpha = \frac{p_0}{E} \frac{\varepsilon}{\Delta} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)}$, $V_1 = \frac{4\pi R}{u_0 T}$,

$K_1 = p_0 C_1$, $K_2 = p_0 C_2$, $G = \alpha p_0$, $\tau = \frac{\psi}{6} \left(\frac{\cos t}{h} + 3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)$, $\psi = \frac{\Delta}{R}$. P - безразмерная

нагрузка на вал, равная

$$P = \frac{W}{Rp_0} = \frac{W\Delta^2}{6\mu_0 u_0 R^2}$$

Входными параметрами в приведенной системе уравнений являются следующие параметры: ϑ , V, V_1, K_1, K_2, G, P . После задания значений этих параметров сначала решаем стационарную задачу в момент времени $t = 0$, то есть решаем уравнение

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{dp}{d\varphi} \right) - \frac{d(\rho h)}{d\varphi} = 0$$

совместно с уравнениями (3.59), (3.60) при условиях

$$p(-\vartheta) = p(\varphi_c) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_c} = 0, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (p \cos \varphi - \tau \sin \varphi) d\varphi = P$$

В результате получаем начальное значение безразмерного эксцентриситета χ и функции $p(\varphi, 0)$, $h(\varphi, 0)$, $\mu(\varphi, 0)$, $\rho(\varphi, 0)$. Метод решения стационарной

задачи изложен в главе 1. Разностные схемы нестационарной задачи и метод решения конечно-разностной системы уравнений аналогичны схемам и методу, изложенным в предыдущем разделе 3.1.

Ниже приведены результаты расчетов при значениях входных параметров $\vartheta = 1.4$, $\alpha = 0.6$, $K_1 = 0.01$, $K_2 = 0.0283$, $G = 0.17$, $P = 1$ и различных значениях параметра V_1 .

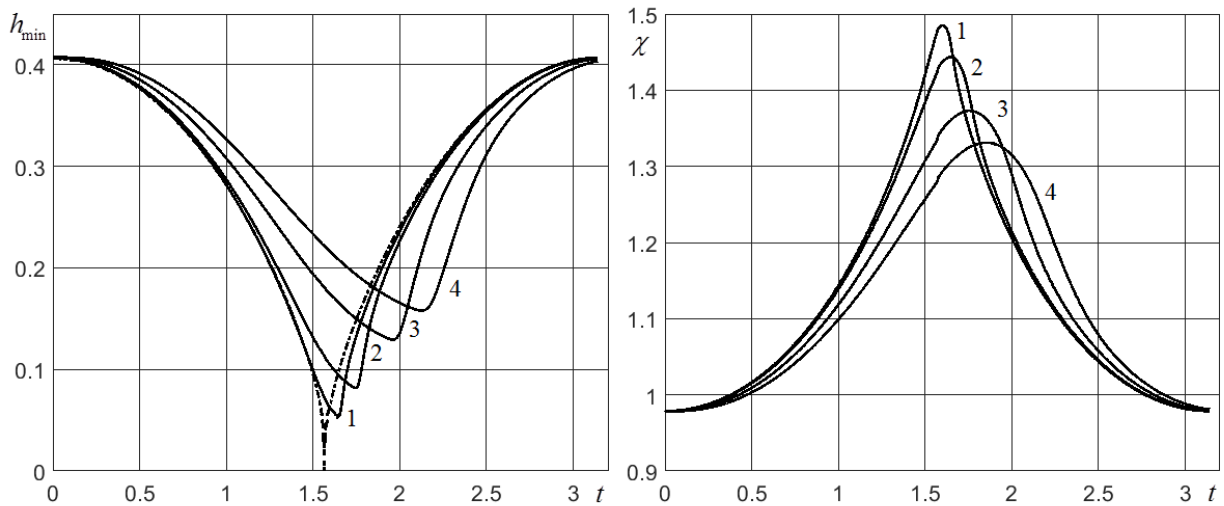


Рис. 3.15. Зависимости минимума по угловой координате толщины смазочного слоя $h_{\min}(t) = \min_{\varphi} h(\varphi, t)$ и относительного эксцентриситета χ от безразмерного времени t при различных значениях параметра V_1 . Кривые 1 - $V_1 = 0.002$, 2 - $V_1 = 0.01$, 3 - $V_1 = 0.05$, 4 - $V_1 = 0.1$. Пунктирной кривой соответствует $V_1 = 0$ (стационарное решение при соответствующей скорости).

На рис. 3.15 приведены зависимости $h_{\min}(t) = \min_{\varphi} h(\varphi, t)$ и относительного эксцентриситета χ от безразмерного времени t при различных значениях параметра V_1 .

Величина $h_{\min}(t)$ представляет собой минимальное по угловой координате значение толщины смазочного слоя в момент времени t . Безразмерный параметр V_1 при постоянных значениях радиуса вала и начальной скорости поверхности вала u_0 обратно пропорционален периоду реверсивного движения T . Наименьшему значению $V_1 = 0.002$ соответствует большой

период реверсивного движения, а наибольшему значению $V_1 = 0.1$ соответствует малый период реверсивного движения.

Пунктирной кривой на верхней части рис. 3.15 проведен график зависимости $h_{\min}^s(t)$, где $h_{\min}^s$ равно минимальному по угловой координате значению толщины смазочного слоя в стационарном решении задачи при скорости, равной $u = u_0 \cos(t)$. Стационарному решению задачи соответствует значение $V_1 = 0$.

Из приведенных на рис. 3.15 результатов расчетов следует, что значение $h_{\min}(t)$ падает, как до смены направления скольжения, так и некоторое время после смены направления скольжения. При этом с уменьшением периода реверсивного движения (при возрастании параметра V_1) длительность периода падения $h_{\min}(t)$ возрастает.

Минимальное значение толщины смазочного слоя за весь период реверсивного движения $h_{\min}^* = \min_t h_{\min}(t)$ возрастает с ростом значения параметра V_1 , то есть с уменьшением периода реверсивного движения T .

Из приведенных результатов следует, что эксцентриситет принимает максимальное значение в момент времени, когда $h_{\min}(t)$ еще падает. При этом максимальное приращение относительного эксцентриситета выше максимального падения $h_{\min}(t)$.

На рис. 3.16 приведены зависимости $h(x)$ и $p(x)$ в различные моменты времени при значении $V_1 = 0.002$. Пунктирным кривым (кривым б) на рис. 3.16 соответствует момент времени, в который толщина смазочного слоя принимает при некотором значении угловой координаты φ минимальное за весь период реверсивного движения значение. В данном случае этот момент времени равен $t = 1.643$, а значение скорости в этот момент времени равно $u = -0.072u_0$, то есть скорость в этот момент времени имеет малое значение.

Моменту времени $t = \pi/2$, при котором скорость равна нулю, соответствуют кривые 5 на рис. 3.16. Видно, что при нулевой скорости толщина смазочного слоя принимает близкое к постоянной значение в широкой области оси φ . Выдавливание смазки из такого зазора происходит медленно и толщина смазочного слоя может сохранять высокое значение в моменты времени, когда скорость мала.

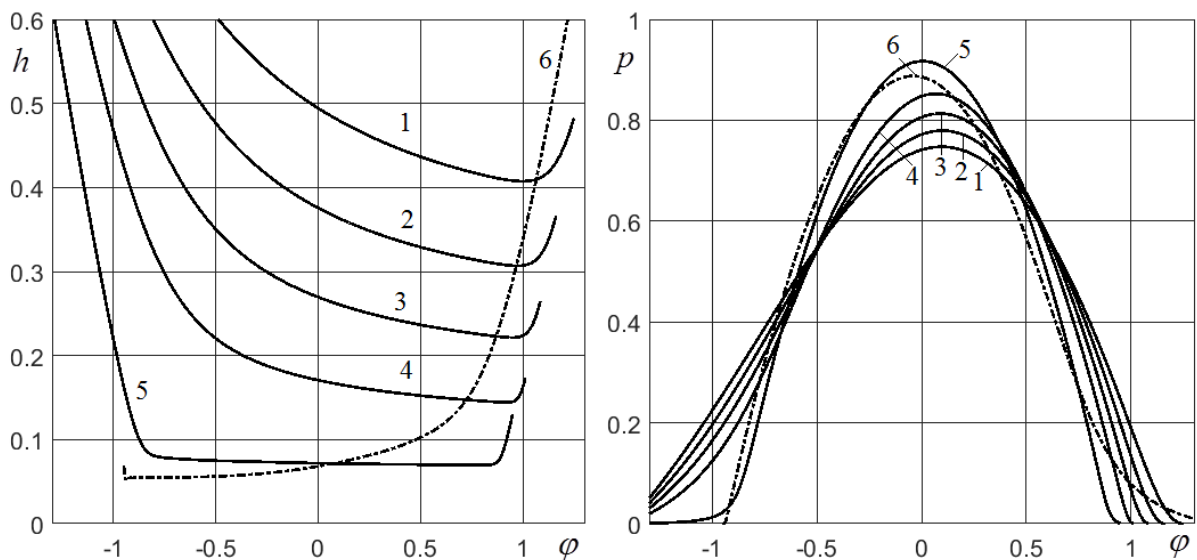


Рис. 3.16. Зависимости толщины смазочного слоя и давления от угловой координаты φ в различные моменты безразмерного времени при $V_1 = 0.002$. Кривые 1 - $t = 0$, 2 - $t = 0.9$, 3 - $t = 1.2$, 4 - $t = 1.4$, 5 - $t = \pi/2$, 6 - $t = 1.643$.

Из приведенных на рис. 3.16 результатов следует, что по мере падения скорости скольжения максимальное давление растет, а область, в которой развивается высокое давление, уменьшается. При нулевой скорости график функции распределения давления близок к симметричному графику относительно линии $\varphi = 0$.

Таким образом, при значении $V_1 = 0.002$, которому соответствует большой период реверсивного движения, в момент времени, когда скорость равна нулю, толщина смазочного слоя близка к постоянной толщине в некоторой области переменной φ , а график функции распределения давления близок к

симметричному графику относительно линии $\varphi=0$ в этой области. Это означает, что при большом периоде реверсивного движения максимальное давления в момент времени, когда скорость равна нулю, можно приближенно определить путем решения контактной задачи при сухом контакте тел. Это можно сделать следующим образом.

Толщина смазочного слоя в области, в которой она близка к постоянной толщине, при большом периоде реверсивного движения мала, поэтому ее можно принять равной нулю. Принимая распределение давления четной функцией координаты φ , что имеет место в сухом контакте тел при пренебрежении силами трения, перепишем уравнение (3.59) в виде

$$1 - \chi \cos \varphi + \alpha p = 0 \quad (3.61)$$

На границе области контакта тел $\varphi = \pm \varphi_0$ давление равно нулю и из (3.61) получаем

$$\chi = \frac{1}{\cos(\varphi_0)} \quad \text{и} \quad p = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} - 1 \right) \quad (3.62)$$

Умножая обе части выражения (3.62) для безразмерного давления p на $\cos \varphi$, интегрируя результат по области $(-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0)$ и учитывая, что этот интеграл равен безразмерной нагрузке, получаем

$$\frac{\varphi_0}{\cos \varphi_0} - \sin \varphi_0 = \alpha P \quad (3.63)$$

Уравнение (3.63) определяет значение угла φ_0 при заданном значении P . При значении $P=1$ из (3.63) получаем $\varphi_0 = 0.876$. Подставляя данное значение для φ_0 в (3.62), получаем $p = 1.67(1.562 \cos \varphi - 1), (-0.876 \leq \varphi \leq 0.876)$ и $p_{\max} = p(\varphi=0) = 0.939$.

Функция $p(\varphi)$, график которой изображен кривой 5 на правой части рис. 3.16, имеет максимальное значение, равное 0.917, близкое к приближенному значению, полученному путем решения контактной задачи при сухом контакте тел.

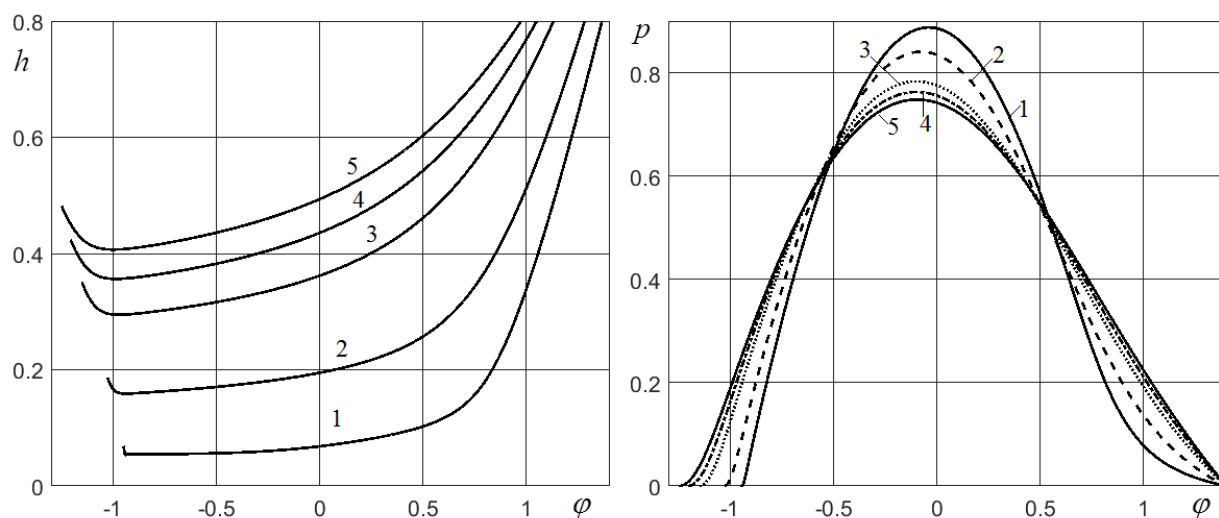


Рис. 3.17. Зависимости толщины смазочного слоя и давления от угловой координаты φ в различные моменты безразмерного времени при $V_1 = 0.002$. Кривые 1 - $t = 1.643$, 2 - $t = 1.8$, 3 - $t = 2.2$, 4 - $t = 2.5$, 5 - $t = \pi$.

На рис. 3.17 приведены зависимости $h(x)$ (верхняя часть рисунка) и $p(x)$ (нижняя часть рисунка) при значении $V_1 = 0.002$ в моменты времени $t \geq 1.643$, когда толщина смазочного слоя возрастает. Максимальное давление при этом падает со временем, а область контакта возрастает.

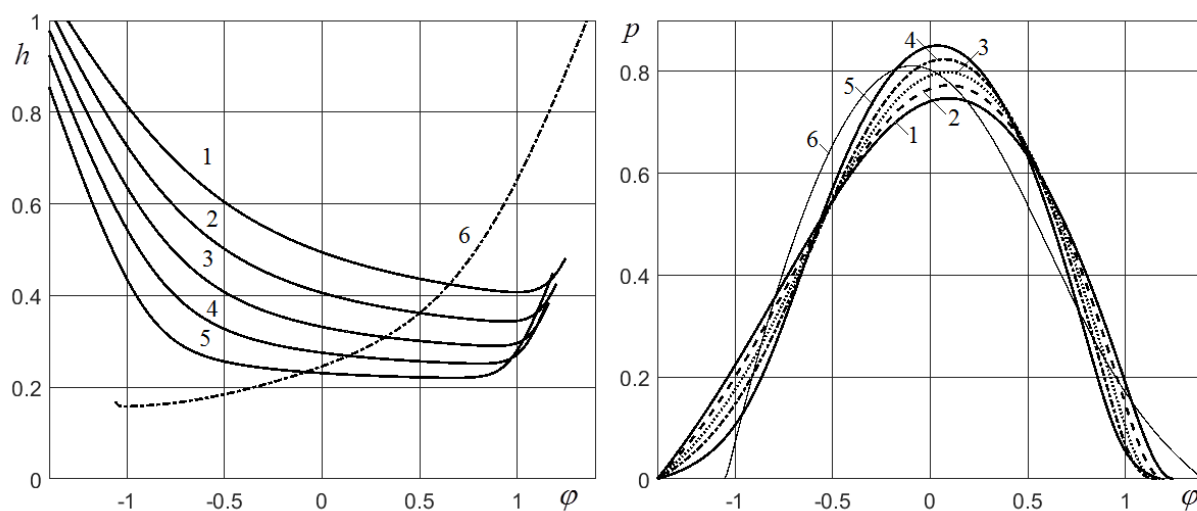


Рис. 3.18. Зависимости толщины смазочного слоя и давления от угловой координаты φ в различные моменты безразмерного времени при $V_1 = 0.1$. Кривая 1 - $t = 0$, 2 - $t = 0.9$, 3 - $t = 1.2$, 4 - $t = 1.4$, 5 - $t = \pi/2$, 6 - $t = 2.138$.

На рис. 3.18 и рис. 3.19 приведены результаты, аналогичные результатам, представленным на рис. 3.16 и рис. 3.17, только при значении $V_1 = 0.1$, которому соответствует малый период реверсивного движения.

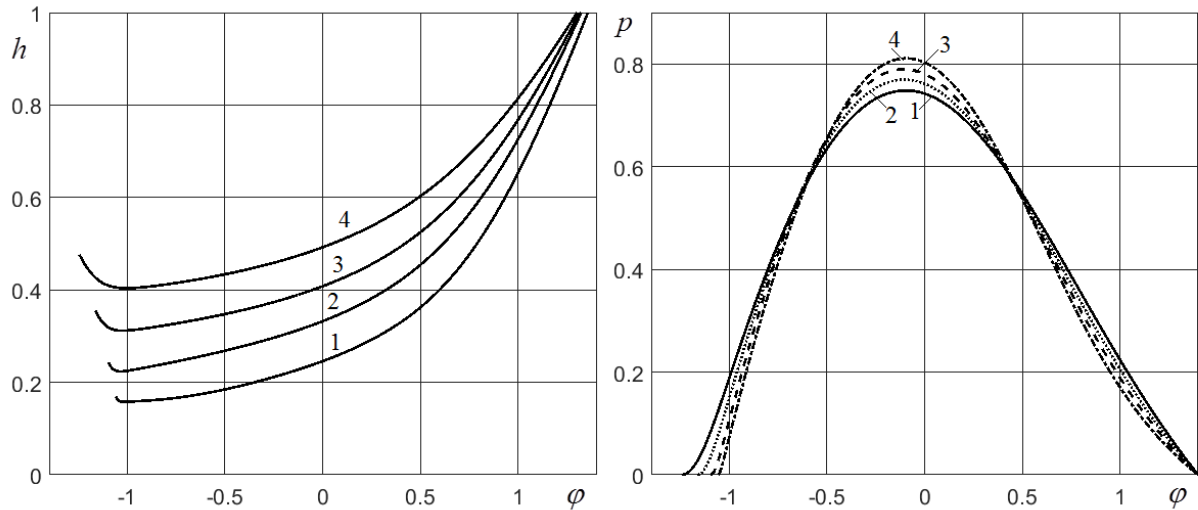


Рис. 3.19. Зависимости толщины смазочного слоя и давления от угловой координаты φ в различные моменты безразмерного времени при $V_1 = 0.1$. Кривая 1 - $t = 2.138$, 2 - $t = 2.3$, 3 - $t = 2.5$, 4 - $t = \pi$.

В данном случае в момент времени, когда скорость равна нулю (кривые 5 на рис. 3.18), толщина смазочного слоя принимает высокое значение ($h > 0.2$). При этом падение минимальной по угловой координате толщины смазочного слоя с момента начала движения составляет не более чем в 2 раза. Рост максимального давления относительно невелик и при нулевой скорости максимальное давление равно 0.85 (в начальный момент времени максимальное давление равно 0.747).

Толщина смазочного слоя начинает расти по всей области контакта в момент времени $t = 2.138$, когда скорость скольжения равна $u = -0.537u_0$, то есть принимает высокое по модулю значение.

Хотя падение $h_{\min}(t)$ происходит длительное время после изменения направления скольжения, величина падения от момента времени, когда скорость равна нулю, до момента времени, когда толщина смазочного слоя

начинает расти по всей области контакта, относительно невелико. В результате с уменьшением периода реверсивного движения минимальная за весь период реверсивного движения толщина смазочного слоя возрастает.

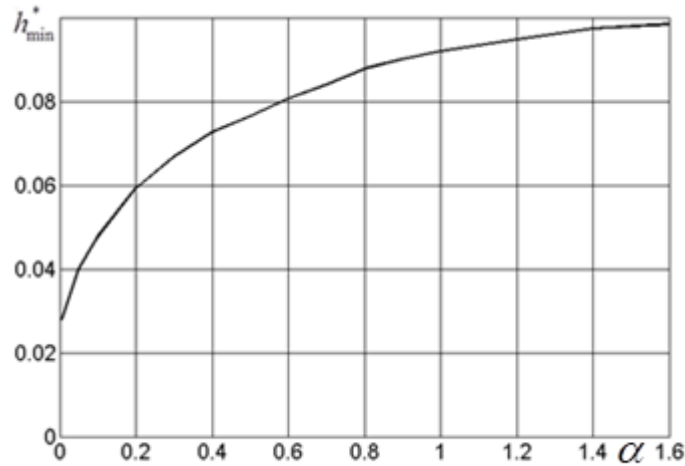


Рис. 3.20. Зависимости минимальной за весь период толщины смазочного слоя от параметра α при $V_1 = 0.01$; $P/\alpha = 1$

Влияние деформаций вкладыша на минимальную толщину смазочного слоя наглядно представляет график, приведенный на рис. 3.20, на котором представлена зависимость минимальный за весь период толщины смазочного слоя от параметра V при выполнении условия $P/\alpha = const = 1$.

$$\frac{P}{\alpha} = \frac{W}{6\mu_0 u} \left(\frac{\Delta}{R} \right)^2 = const = 1$$

Если принять, что изменение параметра α обусловлено изменением модуля упругости, то график на рис. 3.20 иллюстрирует влияние модуля упругости на минимальную за весь цикл толщину смазочного слоя. При $E \rightarrow \infty$ значение $\alpha \rightarrow 0$, то есть нулевому значению α соответствуют жесткие тела. При уменьшении модуля упругости параметр α возрастает.

Расчеты, результаты которых приведены на рис. 3.20, выполнены при значении $V_1 = 0.01$. Приведенные результаты расчетов свидетельствуют о

том, что деформации тел могут повысить минимальную за весь период толщину смазочного слоя в несколько (более чем в 2) раз.

3.4. Численный анализ переходных процессов в радиальном подшипнике скольжения при реверсивном движении. Учет деформаций вала и втулки

Выше показано, что вследствие деформаций вкладыша в подшипнике с тонким вкладышем толщина смазочного слоя стремится принять постоянное значение в области высокого давления в моменты времени, когда скорость близка к нулю. При этом размер области, в которой зазор принимает значение, близкое к постоянному значению, во много раз больше толщины смазочного слоя. Такая форма зазора способствует поддержанию высокого значения толщины смазочного слоя, так как выдавливание смазки из него происходит достаточно медленно.

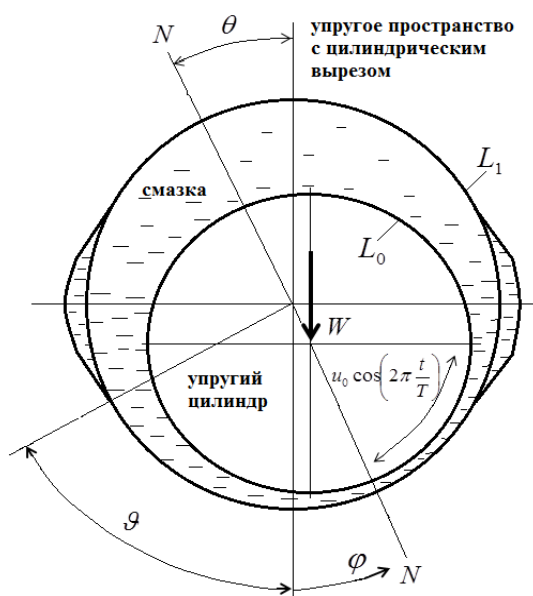


Рис. 3.21. Схема контакта.

Рассмотрим модель подшипника в виде упругого вала, вложенного в цилиндрический вырез в упругом пространстве. Вал совершает реверсивное движение (рис. 3.21). Рассмотрим случай, когда механические свойства вала и пространства с вырезом одинаковы. Выражение для размерной толщины смазочного слоя можно записать в виде

$$\tilde{h}(\varphi, \tilde{t}) = \Delta - \delta(\tilde{t}) \cos(\varphi - \theta) - \frac{4R(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-\vartheta}^{\varphi_2} \tilde{p}(\xi, \tilde{t}) \left[\cos(\varphi - \xi) \ln \left| 2 \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right]$$

где $\delta(\tilde{t})$ эксцентриситет в момент времени $\tilde{t}$, $R = (R_0 + R_1)/2$.

Остальные уравнения и условия имеют такой же вид, как и в предыдущей задаче. Введем безразмерные переменные по формулам

$$h = \frac{\tilde{h}}{\Delta}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{p_0}, \quad p_0 = \frac{1}{8} \frac{\Delta}{R} \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}, \quad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0}, \quad t = 2\pi \frac{\tilde{t}}{T}, \quad u = \frac{\tilde{u}}{u_0}$$

В безразмерных переменных уравнения задачи и граничные условия запишутся в виде

$$h(\varphi, t) = 1 - \chi(t) \cos(\varphi - \theta(t)) + \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p(\xi, t) \left[\cos(\varphi - \xi) \ln \left| \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \right| - \frac{1}{4} \right] d\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) - \alpha \cos t \frac{\partial(\rho h)}{\partial \varphi} = V_1 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t}$$

$$\rho = 1 + \frac{K_1 p}{1 + K_2 p}, \quad \mu = \exp(Gp)$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (p \cos \varphi - \tau \sin \varphi) d\varphi = P, \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (p \sin \varphi + \tau \cos \varphi) d\varphi = 0,$$

$$\tau = \psi \left(\frac{1}{6} V \exp(Gp) \frac{\cos t}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)$$

$$p(-\vartheta) = p(\varphi_c) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \quad \text{при} \quad \cos t \geq 0$$

$$p(\varphi_c) = p(\vartheta) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_c} = 0 \quad \text{при} \quad \cos t < 0,$$

где $\chi = \frac{\delta}{\Delta}$ - относительный эксцентриситет, $\alpha = \frac{48\mu_0 u_0 R^2}{\Delta^3 E'}$, $V_1 = \frac{192\pi\mu_0 R^3}{\Delta^3 E' T}$, $\psi = \frac{\Delta}{R}$,

$K_1 = p_0 C_1$, $K_2 = p_0 C_2$, $G = \alpha p_0$, P - безразмерная нагрузка на вал, равная

$$P = \frac{W}{Rp_0} = \frac{8W(1-\nu^2)}{\Delta E},$$

W - нагрузка на единицу длины подшипника.

Входными параметрами в приведенной системе уравнений являются следующие параметры: ϑ , α , V_1 , K_1 , K_2 , G , P , ψ . После задания значений этих параметров сначала решаем стационарную задачу в момент времени $t = 0$. В результате получаем начальное значение безразмерного эксцентриситета χ и функции $p(\varphi, 0)$, $h(\varphi, 0)$, $(\varphi, 0)$, $\rho(\varphi, 0)$. Метод решения стационарной задачи изложен в главе 1. Разностные схемы нестационарной задачи и метод решения конечно-разностной системы уравнений аналогичны схемам и методу, изложенному в предыдущих разделах.

Ниже приведены результаты расчетов при значениях входных параметров $\vartheta = 1.4$, $K_1 = 0.006$, $K_2 = 0.017$, $Q = 0.1$, $\psi = 0.0005$, двух значениях параметра α , ($\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.5$) и при двух значениях параметра V_1 , ($V_1 = 0.1$ и $V_1 = 0.001$). При значении $\alpha = 0.05$ безразмерная нагрузка равнялась $P = 0.13$, а при значении $\alpha = 0.5$ значение $P = 2.35$. При обоих значениях параметра α безразмерная толщина смазочного слоя в месте обрыва смазочного слоя в начальный момент времени равнялась 0.2. Значению $P = 0.13$ ($\alpha = 0.05$) соответствует случай малой нагрузки на подшипник, а значению $P = 2.35$ ($\alpha = 0.5$) - большой нагрузки. Значению $V_1 = 0.001$ соответствует случай большого периода реверсивного движения, а значению $V_1 = 0.1$ - случай малого периода реверсивного движения. Приведенные ниже результаты расчетов дают представление о различии в поведении толщины смазочного слоя и давления в этих предельных случаях реверсивного движения.

На рис. 3.22 представлены зависимости $h_{\min}(t) = \min_{\varphi} h(\varphi, t)$ и $\chi(t)$ при различных значениях параметров α и V_1 . На рис. 3.23-3.28 представлены зависимости $h(\varphi)$ и $p(\varphi)$ в различные моменты времени при различных значениях параметров α и V_1 .

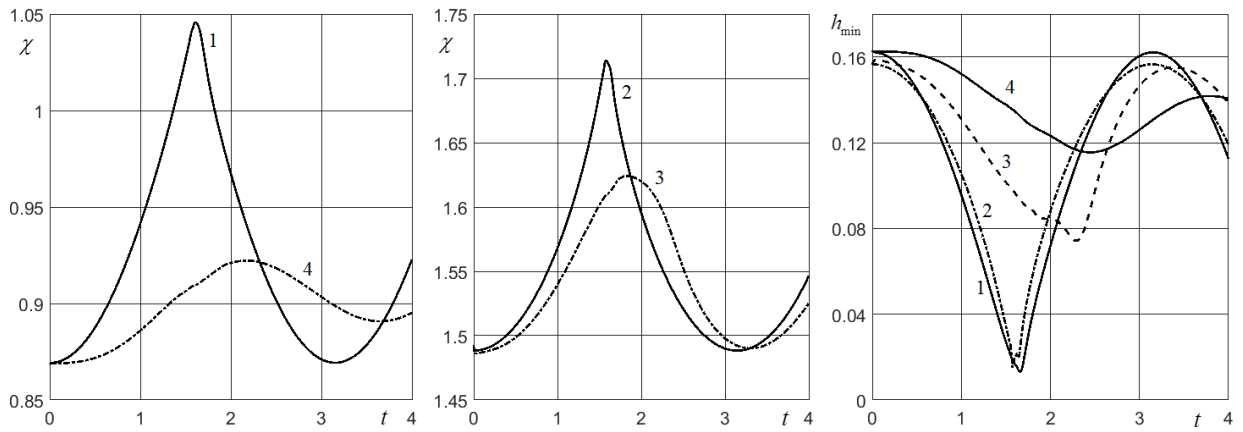


Рис. 3.22. Зависимости $h_{\min}(t)$ и $\chi(t)$ при различных значениях α и V_1 . Кривые 1 - $\alpha = 0.05, V_1 = 0.001$; 2 - $\alpha = 0.5, V_1 = 0.001$; 3 - $\alpha = 0.5, V_1 = 0.1$; 4 - $\alpha = 0.05, V_1 = 0.1$

Из зависимостей $h_{\min}(t)$, приведенных на рис. 3.22, следует, что при всех значениях α и V_1 значение $h_{\min}$ уменьшается при уменьшении скорости скольжения до нуля (до момента времени $t = \pi/2$) и продолжает уменьшаться еще некоторое время после смены направления движения и возрастании скорости скольжения. При большом периоде реверсивного движения задержка времени начала возрастания $h_{\min}$ после смены направления вращения вала составляет малую часть периода, а при малом периоде реверсивного движения эта задержка составляет значительную часть всего периода. При этом задержка больше при меньшей нагрузке.

На рис. 3.22 видно также, что минимальное за весь период реверсивного движения значение толщины смазочного слоя $h_{\min}^* = \min_t h_{\min}(t)$ в случае большого периода реверсивного движения меньше при более низкой нагрузке, а в случае малого периода реверсивного движения – при более высокой нагрузке.

Такая зависимость $h_{\min}^*$ от нагрузки и зависимость времени задержки начала возрастания $h_{\min}$ после смены направления вращения объясняется влиянием демпфирующих свойств смазки и зависимостью этих свойств от ширины

области контакта и наклона графика функции $h(\varphi)$ в области высокого давления.

Рассмотрим сначала случай, когда период реверсивного движения велик ($V_1 = 0.001$). На рис. 3.22 данному случаю соответствуют кривые 1 и 2.

При большом периоде реверсивного движения силы, возникающие в смазочном слое вследствие его сдвливания, в течение большей части периода торможения малы. В течение этого периода основную роль играют гидродинамические силы, обусловленные клиновидностью зазора. В результате толщина смазочного слоя в течение большей части периода торможения близка к стационарной толщине смазочного слоя, соответствующей мгновенной скорости скольжения.

Напряжения в смазочном слое, обусловленные его сдвливанием, начинают существенно проявляться только в моменты времени, когда скорость мала. Однако при высокой нагрузке форма зазора способствует более раннему проявлению напряжений, обусловленных сдвливанием пленки. Это следует из сопоставления графиков функций $h(\varphi)$ для случаев малой и высокой нагрузок, приведенных ниже.

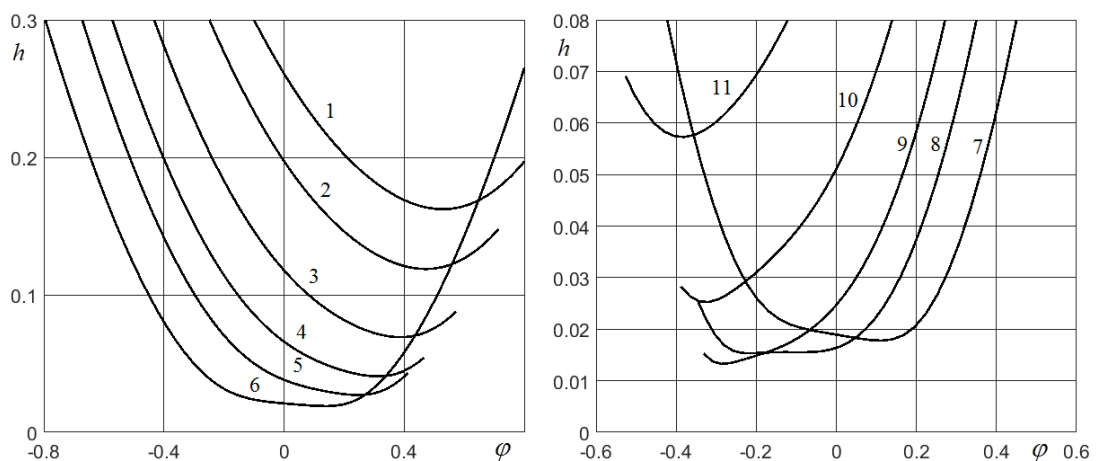


Рис. 3.23. Зависимости $h(\varphi)$ при $\alpha = 0.05$, $V_1 = 0.001$. Кривая 1 - $t = 0$, 2 - $t = 0.8$, 3 - $t = 1.2$, 4 - $t = 1.4$, 5 - $t = 1.5$, 6 - $t = \pi/2$, 7 - $t = 1.59$, 8 - $t = 1.63$, 9 - $t = 1.66$, 10 - $t = 1.73$, 11 - $t = 1.9$,

При малой нагрузке (рис. 3.23) кривая $h(\varphi)$ имеет высокий наклон вплоть до момента времени $t=1.5$ (кривая 5 на рис. 3.23). И только после этого момента времени наклон кривой $h(\varphi)$ быстро уменьшается в небольшой области. В момент времени $t = \pi/2$, когда скорость равна нулю, зазор имеет слабый наклон в области $-0.2 < \varphi < 0.2$. В этот момент времени давление в смазочном слое создается только за счет сдавливания пленки.

Из результатов расчетов следует, что до момента времени $t=1.535$ выходная граница смазочного слоя смещается влево. Начиная с этого момента, она быстро устремляется вправо. В результате в момент времени $t = \pi/2$ функция $h(\varphi)$ близка к симметричной функции относительно линии действия нагрузки в области $(-0.8 \leq \varphi \leq 0.8)$. Однако и в этот момент кривая $h(\varphi)$ сохраняет небольшой наклон в окрестности точки $\varphi = 0$, понижающий напряжения в смазке, обусловленные сдавливанием пленки.

И только в момент времени $t=1.63$, когда вал вращается в направлении, противоположном начальному направлению вращения, зазор близок к постоянному зазору в области $(-0.25 < \varphi < 0)$ (кривая 8 на рис. 3.23). В этот момент времени действие сил, обусловленных сдавливанием пленки, максимально. В дальнейшем в этой области на графике функции $h(\varphi)$ появляется наклон в противоположном направлении, толщина смазочного слоя еще некоторое время падает в левой части этой области и наклон быстро возрастает.

Повышение толщины смазочного слоя начинается в тот момент, когда гидродинамические силы, обусловленные клиновидностью зазора, достигают необходимого значения. В момент времени $t=1.66$ график функции $h(\varphi)$ (кривая 9 на рис. 3.23) имеет высокий наклон. При этом толщина смазочного слоя мала. Оба этих фактора приводят к тому, что гидродинамических сил становится достаточно, чтобы обеспечить повышение $h_{\min}(t)$. В результате $h_{\min}(t)$ достигает в момент времени $t=1.66$ минимального за весь период

реверсивного движения значения $h_{\min}^* = 0.01326$, и далее возрастает. При этом значение $h_{\min}(t)$ падает в 12,18 раз, от значения 0.162 при $t = 0$ до значения 0.0133 при $t = 1.66$.

Одновременно с падением толщины смазочного слоя происходит рост эксцентриситета. Зависимость $\chi(t)$ для рассматриваемого случая малой нагрузки и большого периода реверсивного движения представлена кривой 1 на рис. 3.22. Эксцентриситет возрастает от значения $\chi = 0.869$ при $t = 0$ до значения $\chi = 1.046$ в момент времени $t = 1.614$.

Из приведенных результатов следует, что рост эксцентриситета, равный $\Delta\chi = 0.191$, превышает максимальное падение $h_{\min}$, равное $\Delta h_{\min} = 0.149$. Это связано с тем, что изменение эксцентриситета обусловлено не только изменением толщины смазочного слоя, но и изменением деформаций контактирующих тел вследствие перераспределения давления.

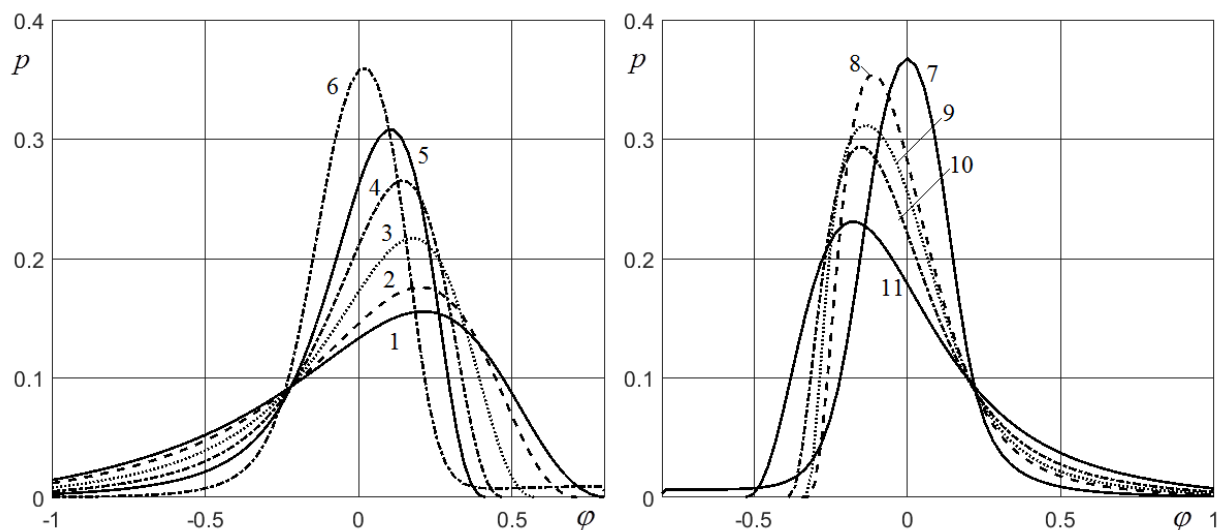


Рис. 3.24. Зависимости $\bar{p}(\varphi)$ при $\alpha = 0.05$, $V_1 = 0.001$. Кривая 1 - $t = 0$, 2 - $t = 0.8$, 3 - $t = 1.2$, 4 - $t = 1.4$, 5 - $t = 1.5$, 6 - $t = \pi/2$, 7 - $t = 1.59$, 8 - $t = 1.63$, 9 - $t = 1.66$, 10 - $t = 1.73$, 11 - $t = 1.9$.

Графики зависимостей $p(\varphi)$ в различные моменты времени при $V = 0.05, V_1 = 0.001$ приведены на фиг. 3.24. Из приведенных результатов следует, что в процессе торможения размер области высокого давления уменьшается, максимальное давление возрастает, а точка максимума смещается влево. В момент времени, когда скорость равна нулю, давление близко к постоянному, малому значению в области $0.4 < \varphi < 0.8$. Это есть область, которую смазка заполнила в результате быстрого смещения граничной точки $\varphi = \varphi_c$ вправо после момента времени $t = 1.535$. Смазка выдавливается в эту область и небольшое давление создается в ней за счет сдавливания пленки. В области $-0.2 < \varphi < 0.2$ распределение давления близко к симметричному распределению относительно линии действия нагрузки, а максимальное давление более чем в два раза выше его значения в начальный момент времени. Такое перераспределение давления и приводит к более высокому росту эксцентриситета по сравнению с падением $h_{\min}$.

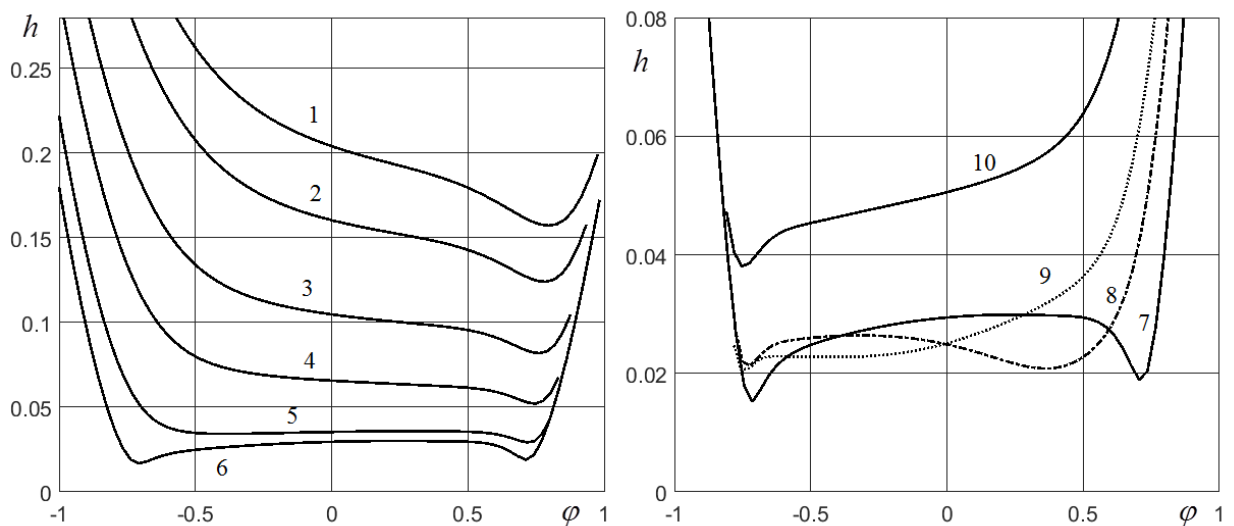


Рис. 3.25. Зависимости $h(\varphi)$ при $\alpha = 0.5, V_1 = 0.001$. Кривая 1 - $t = 0$, 2 - $t = 0.8$, 3 - $t = 1.2$, 4 - $t = 1.4$, 5 - $t = 1.53$, 6 - $t = \pi/2$, 7 - $t = 1.573$, 8 - $t = 1.613$, 9 - $t = 1.638$, 10 - $t = 1.7$

При высокой нагрузке $\alpha = 0.5$ ($P = 2.35$) зависимости $h(\varphi)$ приведены на фиг. 3.25. Зависимость $h_{\min}(t)$ и $\chi(t)$ в данном случае представлены кривыми 2 на рис.3.22. Из приведенных зависимостей следует, что наклон кривой $h(\varphi)$ ниже, чем при малой нагрузке, с самого начала процесса торможения. Это способствует большему проявлению сил, обусловленных сдавливанием пленки. В результате, с самого начала процесса торможения скорость падения $h_{\min}$ при высокой нагрузке ниже, чем при низкой нагрузке. И значение $h_{\min}$ в случае высокой нагрузки, которое в начальный момент времени ниже, чем в случае низкой нагрузки, через некоторое время становится выше $h_{\min}$ в случае низкой нагрузки.

Со временем наклон кривой $h(\varphi)$ в области высокого давления уменьшается, и в момент времени $t = 1.53$, то есть до достижения нулевой скорости, зазор становится плоскопараллельным в области $(-0.5 < \varphi < 0.5)$. При этом функция $h(\varphi)$ имеет минимум правее точки $\varphi = 0.6$. В этот момент времени давление в смазочном слое создается, в основном, за счет сдавливания пленки. Отметим, что при малой нагрузке зазор оставался клиновидным до полной остановки вала и еще некоторое время после этого.

В момент остановки вала ($t = \pi/2$) в случае высокой нагрузки зазор имеет два минимума, один левее точки $\varphi = -0.6$, а другой - правее точки $\varphi = 0.6$ (кривая 6 на рис. 3.25). Такая форма зазора препятствует вытеканию смазки из него и способствует более сильному влиянию сдавливания пленки на характеристики смазочного слоя. Два минимума сохраняются еще некоторое время после смены направления вращения. При этом правый минимум поднимается, сдвигаясь влево, и постепенно исчезает.

В результате в случае высокой нагрузки значение $h_{\min}(t)$ падает в 10.35 раз от значения 0.1572 при $t = 0$ до значения 0.01519 при $t = 1.573$.

Относительный эксцентриситет (кривая 2 на рис. 3.22) при этом возрастает от значения $\chi = 1.488$ при $t = 0$ до значения $\chi = 1.714$ при $t = 1.578$.

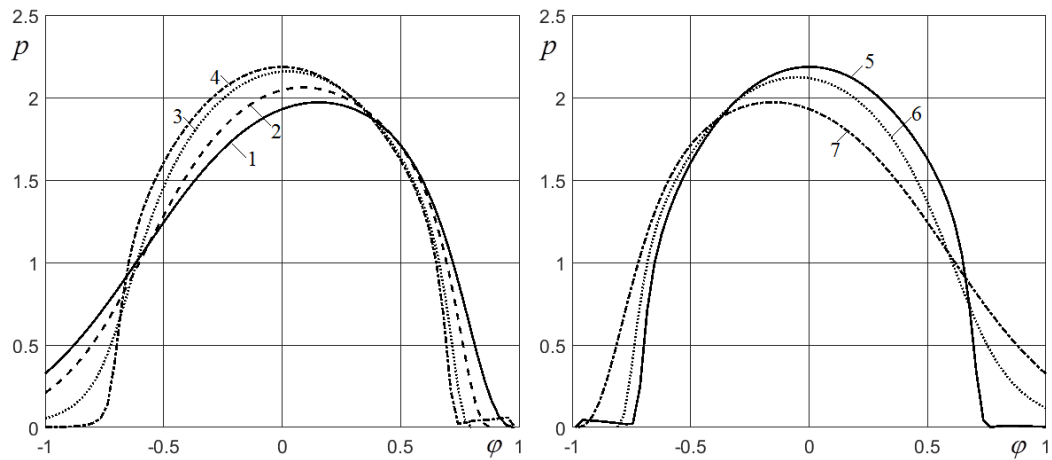


Рис. 3.26. Зависимости $\bar{p}(\varphi)$ при $\alpha = 0.5$, $V_1 = 0.001$. Кривая 1 - $t = 0$, 2 - $t = 1.2$, 3 - $t = 1.53$, 4 - $t = \pi/2$, 5 - $t = 1.573$, 6 - $t = 1.7$, 7 - $t = 3$

На рис. 3.26 приведены графики функций $p(\varphi)$ в разные моменты времени. В данном случае размер области высокого давления изменяется слабо со временем. Вследствие этого относительный рост максимального давления невелик.

При малом периоде реверсивного движения графики функций $h(\varphi)$ приведены на рис. 3.27 для случая малой нагрузки и на рис. 3.28 для случая высокой нагрузки. Зависимости $h_{\min}(t)$ и $\chi(t)$ представлены, соответственно, кривыми 4 и 3 на рис. 3.22.

При малом периоде реверсивного скорость падает настолько быстро, что с самого начала основную роль в формировании толщины смазочного слоя играют силы, обусловленные сдавливанием пленки.

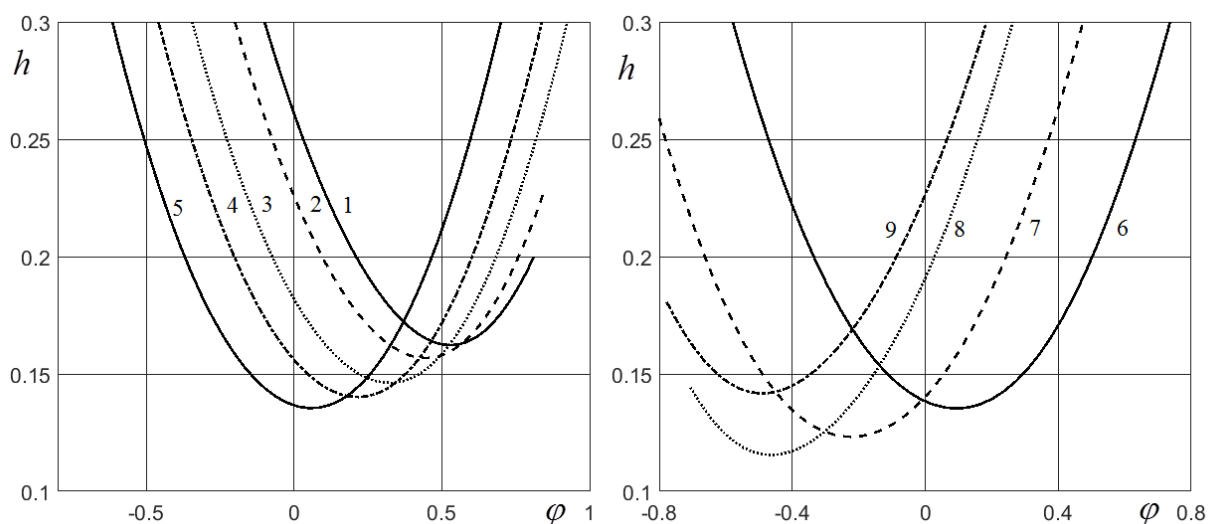


Рис. 3.27. Зависимости $h(\varphi)$ при $\alpha = 0.05$, $V_1 = 0.1$. Кривая 1 - $t = 0$,
2 - $t = 0.8$, 3 - $t = 1.2$, 4 - $t = 1.4$, 5 - $t = \pi/2$, 6 - $t = 1.58$, 7 - $t = 2$, 8 - $t = 2.45$, 9 -
 $t = 3.82$

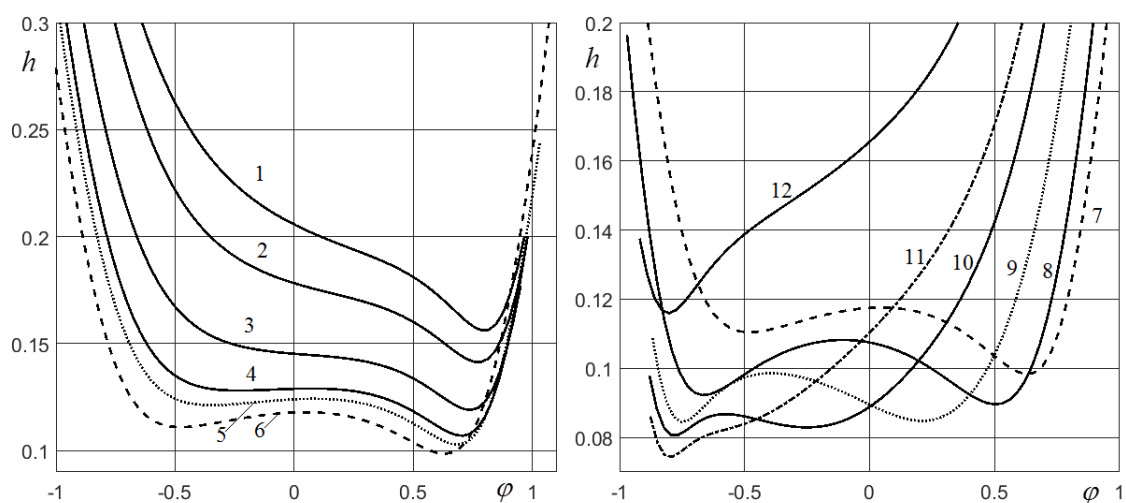


Рис. 3.28. Зависимости $h(\varphi)$ при $\alpha = 0.5$, $V_1 = 0.1$. Кривая 1 - $t = 0$,
2 - $t = 0.8$, 3 - $t = 1.2$, 4 - $t = 1.4$, 5 - $t = 1.47$, 6 - $t = \pi/2$, 7 - $t = 1.576$, 8 - $t = 1.76$, 9 -
 $t = 1.97$, 10 - $t = 2.15$, 11 - $t = 2.276$, 12 - $t = 2.63$

При малой нагрузке уравновешивающие ее силы возникают в смазочном слое при малой скорости падения толщины смазочного слоя. В результате уменьшение толщины смазочного слоя невелико. За весь период значение $h_{\min}$ уменьшается от значения 0.1622 при $t = 0$ до значения 0.1155 при

$t = 2.45$. При этом изменение со временем графика функции $h(\varphi)$ можно представить как его смещение влево и вниз до момента времени $t = 2.45$, а затем его смещение влево и вверх. Форма графика при этом изменяется мало. Изменяется только положение выходной границы.

Толщина смазочного слоя при малой нагрузке велика при нулевой скорости, поэтому гидродинамические силы становятся существенными только после набора высокой скорости. В результате только в момент времени $t = 2.45$, когда скорость скольжения составляет 77% от начальной скорости, гидродинамические силы обеспечивают рост $h_{\min}(t)$. На рис. 3.22 (кривая 3) видно, что толщина смазочного слоя растет еще длительное время после достижения валом максимальной скорости и последующего ее уменьшения. При этом $h_{\min}$ не достигает своего начального значения.

Сравнивая кривые 3 на рис. 3.22, можно увидеть, что эксцентриситет достигает своего максимума значительно ранее, чем $h_{\min}$ достигает своего минимума. Аналогичный сдвиг, но значительно меньший по длительности, имел место и при большом периоде реверсивного движения. Данный сдвиг объясняется ростом угла θ между линией нагрузки и линией центров при росте скорости вала после смены направления вращения. В результате роста этого угла толщина смазочного слоя на линии действия нагрузки растет, что приводит к уменьшению эксцентриситета, хотя $h_{\min}$ при этом уменьшается.

При высокой нагрузке для обеспечения равновесия вала необходимо более быстрое уменьшение толщины смазочного слоя, чем при малой нагрузке. Здесь так же, как и при большом периоде реверсивного движения, в момент остановки вала функция $h(\varphi)$ имеет два минимума (кривая 6 на рис. 3.28). Такая форма зазора сохраняется длительное время после смены направления вращения вала. При этом правый минимум сдвигается влево и оба минимума опускаются. В момент времени $t = 2.276$ функция $h(\varphi)$ имеет один минимум

и ее график имеет высокий наклон правее этого минимума. Этим условиям достаточно, чтобы гидродинамические силы обеспечили повышение $h_{\min}(t)$.

При малом периоде реверсивного движения максимальное давление мало изменяется со временем, как в случае малой нагрузки, так и в случае большой нагрузки. В связи с этим они не приводятся в данной работе.

В работе [49] расчет периода реверсивного движения подшипника скольжения проводился с использованием решения задачи без учета деформаций и без учета вращения вала. При этом начальная толщина смазочного слоя определялась из решения гидродинамической задачи смазки вращающегося вала. Далее определялось время, за которое жесткий вал при отсутствии вращения под действием приложенной к нему нагрузки опустится до положения, в котором минимальная толщина смазочного слоя равна критической толщине жидкостного режима. Приведен пример расчета периода для подшипника с параметрами $\theta = \frac{\pi}{3} = 1.0472 \text{ рад} = 60^\circ$, $d = 1 \text{ м}$, $L = 0.75 \text{ м}$, $E = 220 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $\psi = 0.00035$, $u_0 = 0.366 \text{ м/с}$, нагрузка $Q = 8 \text{ Мн}$, $\mu_0 = 0.285 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Расчеты, приведенные в работе [49], дали следующие результаты:

- критическая величина зазора для данного подшипника, обеспечивающего полное разделение поверхностей, равна $h_{кр} = 10.2 \text{ мкм}$;
- начальная минимальная толщина смазочного слоя равна $h_{\min}^0 = 12.25 \text{ мкм}$;
- период реверсивного движения, при котором обеспечивается гидродинамический режим, должен удовлетворять условию $T \leq 14.16 \text{ сек}$.

Приведем результаты расчетов по изложенной методике с учетом деформаций поверхностей трения. Параметрам подшипника соответствует коэффициент нагруженности $B = P/\alpha = W\Delta^2/6\mu_0 u_0 R^2 = 2.088$, коэффициент податливости $\alpha = 0.966$. Расчеты проведены при значении $V_1 = 0.015$. При этом период реверсивного движения равен $T = 4\pi\alpha R/(u_0 V_1) = 1106 \text{ сек}$, что в

78 раз выше значения, полученного при расчете без учета деформаций и вращения вала. Если учесть вращение вала, но не учитывать деформации, уровень повышения за счет деформаций станет равным 29. Кривая 1 на рис. 3.29а – график функции $h(\varphi)$ в начальный момент времени, когда скорость максимальна. Минимальная толщина смазочного слоя в этот момент равна 35.2 мкм , что в 2.9 раза выше толщины $h_{\min}^0$, полученной без учета деформаций. При этом начальный относительный эксцентриситет $\chi_0 = 1.23$ и форма зазора принципиально отличается от параболы, имеющей место при отсутствии деформаций.

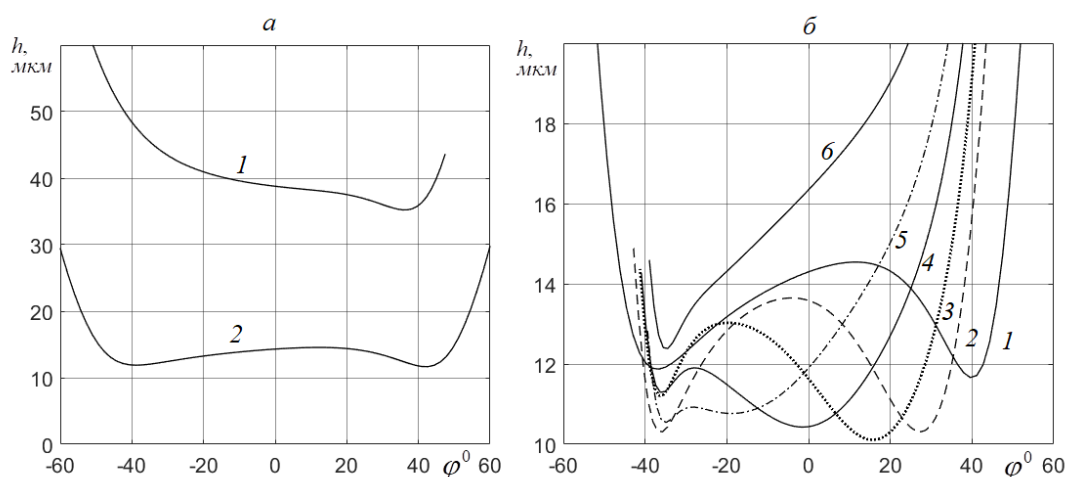


Рис. 3.29

Кривая 2 на рис. 3.29а – график функции $h(\varphi)$ в момент времени $\tilde{t} = T/4 = 276.5 \text{ сек}$, когда скорость равна нулю. При этом минимальная толщина смазочного слоя равна 11.7 мкм , что выше $h_{кр}$. На рис. 3.29б представлены графики зависимостей $h(\varphi)$ в первые моменты времени после смены направления вращения. На рис. 3.29а входная область смазочного слоя расположена слева, на рис. 3.29б – справа. Кривая 1 на рис. 3.29б – это кривая 2 на рис. 3.29а после изменения направления вращения. Кривой 2 соответствует $\tilde{t} = 289 \text{ сек}$, 3 - $\tilde{t} = 297 \text{ сек}$, 4 - $\tilde{t} = 304 \text{ сек}$, 5 - $\tilde{t} = 309 \text{ сек}$, 6 -

$\tilde{t} = 319 \text{сек.}$ Из приведенных результатов следует, что после смены направления толщина смазочного слоя еще некоторое время (порядка 20 секунд) продолжает убывать, достигает своего минимума, равного 10.2 мкм, а затем возрастает. После смены направления вращения происходит перестройка формы зазора в виде волнового процесса. После формирования входной области в виде сужающегося зазора происходит рост толщины смазочного слоя.

Таким образом, период гидродинамического режима в данном примере должен удовлетворять условию $T \leq 1106 \text{сек.}$

Пусть $k = T_{m,d} / T_{m,0}$, где $T_{m,d}$ - расчетное значение максимального периода реверсивного движения в жидкостном режиме с учетом деформаций, $T_{m,0}$ - расчетное значение максимального периода реверсивного движения в жидкостном режиме без учета деформаций, но при учете вращения вала. Значение k зависит от коэффициента нагруженности B , коэффициента податливости α и от отношения критического значения минимальной толщины смазочного слоя к радиальному зазору ($h_{кр} = \tilde{h}_{кр} / \Delta$).

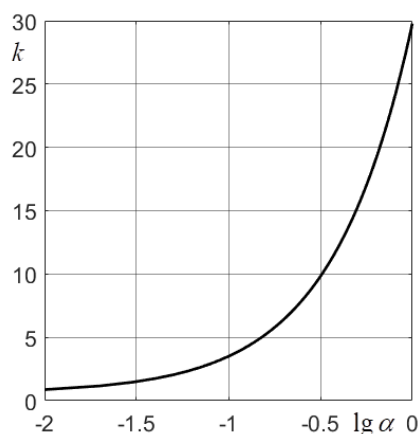


Рис. 3.30

На рис. 3.30 приведен график зависимости $k(\alpha)$ при $B = 2, h_{кр} = 0.06$. Значение параметра k при заданных значениях $B, \alpha, h_{кр}$ определялось следующим образом. Решалась стационарная задача при заданных значениях B, α . При

этом определялась начальная функция $h(x)$. Далее решалась задача реверсивного движения при различных значениях параметра V_1 . Подбиралось такое значение параметра V_1 , при котором минимальное по угловой координате значение функции $h(x)$ в процессе реверсивного движения равнялось $h_{кр}$. Пусть полученное значение V_1 равно $V_{1,d}$.

Далее аналогичным образом определялось значение $V_{1,0}$ путем решения указанных задач без учета деформаций. Вычисляем $k = V_{1,0}/V_{1,d}$.

Интерполируя зависимость, приведенную на рис. 3.30 и полученную путем численного решения задач реверсивного движения при 10 значениях α , многочленом второй степени, получаем $k = 0.58 + 46.4\alpha - 17.2\alpha^2$. При изменении α от 0.01 до 1 значение k изменяется от 1.04 до 29.7.

Выводы по главе 3

В третьей главе рассмотрены нестационарные задачи упруго-гидродинамической теории смазки. Проведен численный анализ переходных процессов во внешнем УГД – контакте цилиндров при реверсе. Проведено исследование влияния вязкоупругих свойств смазки на процесс формирования смазочного слоя в локальном контакте цилиндров при движении из состояния покоя. Построена модель данного процесса с учетом упругих свойств смазочного материала. В отличие от работ других авторов, скорость движения фронта не предполагается равной скорости поверхностей, а определяется при решении задачи. Результаты расчетов показали, что упругость смазки может существенно повысить высоту формируемого фронта до разъединения поверхностей.

Рассмотрен реверсивный режим работы подшипника скольжения. Рассмотрены две плоские модели подшипника: жесткие вал и втулка с тонким упругим вкладышем и внутренний контакт упругих тел. В модели с тонким упругим вкладышем установлено, что в моменты времени, когда скорость близка к нулю, поверхности деформируются так, что имеется широкая область, в которой толщина смазки близка к постоянной толщине. В эти моменты времени давление создается за счет сдавливания пленки. Показано, что режим жидкостного трения может быть обеспечен в течение всего периода. В случае обоих упругих тел на границах широкой области зазор уменьшается, и смазка встречает сопротивление при вытекании из этой области. Приведено сопоставление результатов расчета максимального периода реверсивного режима по методике, используемой до настоящего времени, с результатами расчета по приведенной в диссертации методике. Сопоставление показало, что по приведенной в диссертации методике максимальный период реверсивного движения в 78 раз выше периода, рассчитанного по классической методике. При этом деформации

поверхностей трения повышают максимальный период реверсивного движения в 29 раз.

Установлено, что:

- степень влияния деформаций на максимальный период реверсивного жидкостного режима определяется величиной критерия k (отношение максимального периода, полученного с учетом деформаций, к его значению, полученному без учета деформаций);
- величина критерия k зависит от коэффициента нагруженности $B = W\Delta^2 / 6\mu_0 u_0 R^2$, отношения критического значения минимальной толщины смазочного слоя к радиальному зазору ($H_{кр}$), и коэффициента податливости α ;
- при наиболее распространенных значениях $B=2$, $H_{кр}=0.06$ в интервале $0.01 < \alpha \leq 1$ значение k может быть определено по формуле $k = 0.58 + 46.4\alpha - 17.2\alpha^2$ и варьируется от 1.04 до 29.7.

Основные результаты главы опубликованы в работах [52, 54, 55, 59, 61, 62, 66, 142, 143].

ГЛАВА 4. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УЗЛОВ ТРЕНИЯ

4.1. Инженерная методика расчета радиальных подшипников скольжения жидкостного трения. Методика позволяет определить максимальную температуру в смазочном слое и минимальную толщину смазочного слоя. Отметим, что при описании подшипников скольжения размерное давление обозначено переменной p , размерная толщина смазочного слоя – переменной h , безразмерное давление – переменной q , а безразмерная толщина смазочного слоя – переменной H .

Температура t_c является решением уравнения (1.103), или (1.104), где параметр q_T в общем случае зависит от переменных $t_c, H_{\min}, V, Pe, \Lambda$. Анализ результатов большого количества численных расчетов показал, что q_T можно представить в виде

$$q_T = q_{T,0} \exp \left(-(\alpha_0 + 0.0584V_c) \frac{S}{t_c^{(m+1)}} \right) \quad (4.1)$$

где $q_{T,0}$ зависит от $H_{\min}$ и V_c , α_0 зависит от $H_{\min}$, $S = \Lambda P_e = \frac{\mu_{\text{ex}} u^2}{\lambda T_{\text{ex}}}$, $V_c = \frac{V_0}{t_c^m}$,

$$V_0 = \frac{48\mu_{\text{ex}} u}{RE'\psi^3}.$$

Графики зависимостей $\lg q_{T,0}$ от параметра $H_{\min}$ при различных значениях параметра V_c приведены на рис. 4.1. В табл. 4.1 приведены значения $\lg q_{T,0}$ при различных значениях $H_{\min}$ и V_c . График зависимости α_T от параметра $H_{\min}$ приведен на рис. 4.2. Для расчетов по инженерной методике также требуются зависимости коэффициента нагруженности B от параметра $H_{\min}$ при различных значениях параметра V . Данные зависимости

приведены на рис. 4.3*а*, 4.3*б* и 4.3*в*. На рис. 4.4 представлены зависимости $t_{\max}$ от параметра $S_t = S/t_c^{(m+1)}$ при различных значениях $H_{\min}$.

$H_{\min}$	0.0125	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25	0.275	0.3	0.325	0.35	0.4
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 0$	2.0	1.52	1.29	1.15	1.06	0.98	0.93	0.9	0.87	0.839	0.813	0.8	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 0.05$	2.22	1.732	1.427	1.261	1.122	1.02	0.95	0.9	0.87	0.839	0.813	0.8	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 0.1$	2.44	1.944	1.564	1.371	1.184	1.06	0.965	0.9	0.87	0.839	0.813	0.8	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 0.15$	2.28	2.098	1.698	1.465	1.258	1.128	1.012	0.933	0.88	0.839	0.813	0.8	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 0.2$	2.692	2.231	1.831	1.554	1.338	1.208	1.07	0.977	0.893	0.839	0.813	0.8	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 0.3$	2.843	2.437	2.018	1.598	1.473	1.313	1.149	1.039	0.939	0.868	0.826	0.8	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 0.6$	3.002	2.645	2.217	1.88	1.638	1.442	1.253	1.119	1.01	0.925	0.855	0.81	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 1.0$	3.114	2.762	2.355	2.023	1.76	1.554	1.349	1.188	1.063	0.966	0.881	0.825	0.79	0.779	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 1.5$	3.199	2.856	2.465	2.135	1.865	1.659	1.445	1.272	1.136	1.026	0.932	0.859	0.81	0.789	0.767	0.757
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 2.0$	3.265	2.931	2.554	2.224	1.954	1.751	1.534	1.356	1.211	1.088	0.99	0.899	0.836	0.803	0.767	0.757

$\lg q_{T,0},$ $V_c = 2.5$	3.328	3.006	2.632	2.306	2.035	1.832	1.615	1.435	1.285	1.152	1.048	0.947	0.838	0.829	0.785	0.761
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 3$	3.388	3.083	2.698	2.383	2.108	1.898	1.688	1.508	1.358	1.218	1.108	1.003	0.923	0.869	0.822	0.768
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 4.0$	3.508	3.235	2.831	2.535	2.254	2.031	1.834	1.654	1.504	1.351	1.228	1.116	1.023	0.948	0.897	0.784
$\lg q_{T,0},$ $V_c = 5.0$	3.627	3.388	2.963	2.688	2.400	2.163	1.980	1.800	1.650	1.483	1.347	1.229	1.122	1.028	0.972	0.799

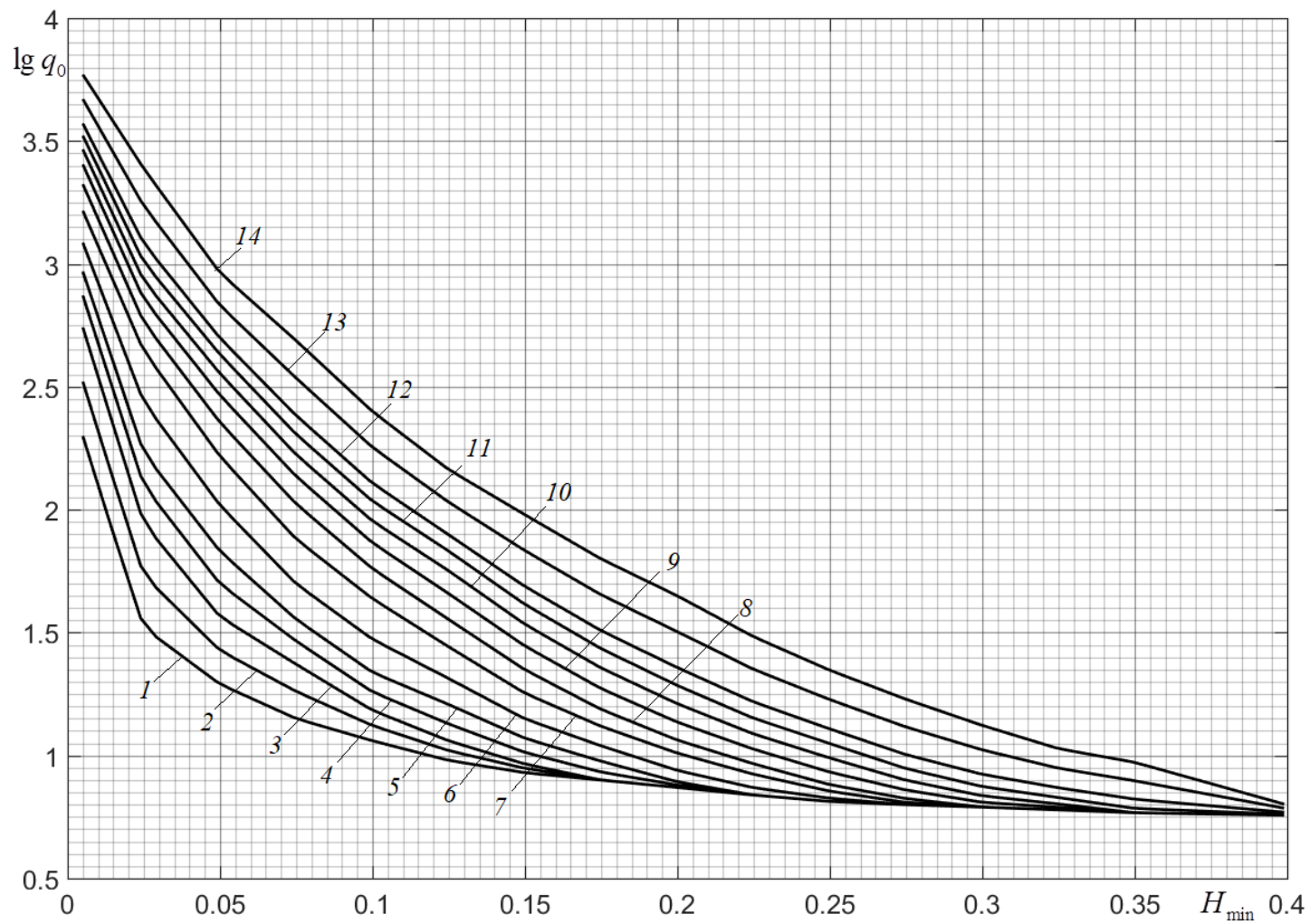


Рис. 4.1. Зависимость $\lg q_{T,0}$ от $H_{\min}$ при различных значениях параметра V_c . Кривая 1 - $V_c = 0$, 2 - $V_c = 0.05$, 3 - $V_c = 0.1$, 4 - $V_c = 0.15$, 5 - $V_c = 0.2$, 6 - $V_c = 0.3$, 7 - $V_c = 0.6$, 8 - $V_c = 1.0$, 9 - $V_c = 1.5$, 10 - $V_c = 2.0$, 11 - $V_c = 2.5$, 12 - $V_c = 3.0$, 13 - $V_c = 4.0$, 14 - $V_c = 5.0$

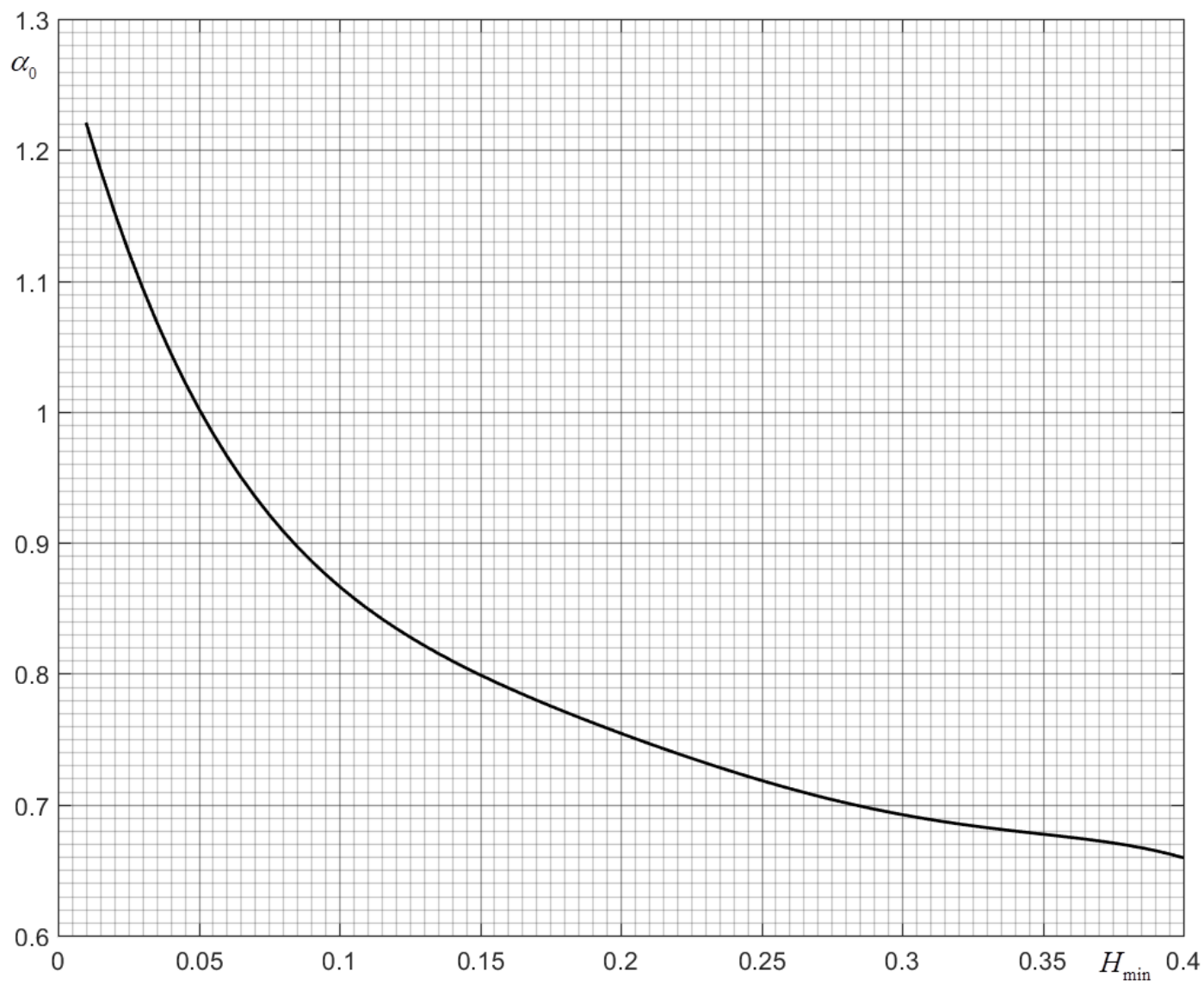


Рис. 4.2. Зависимость параметра α_0 от $H_{\min}$.

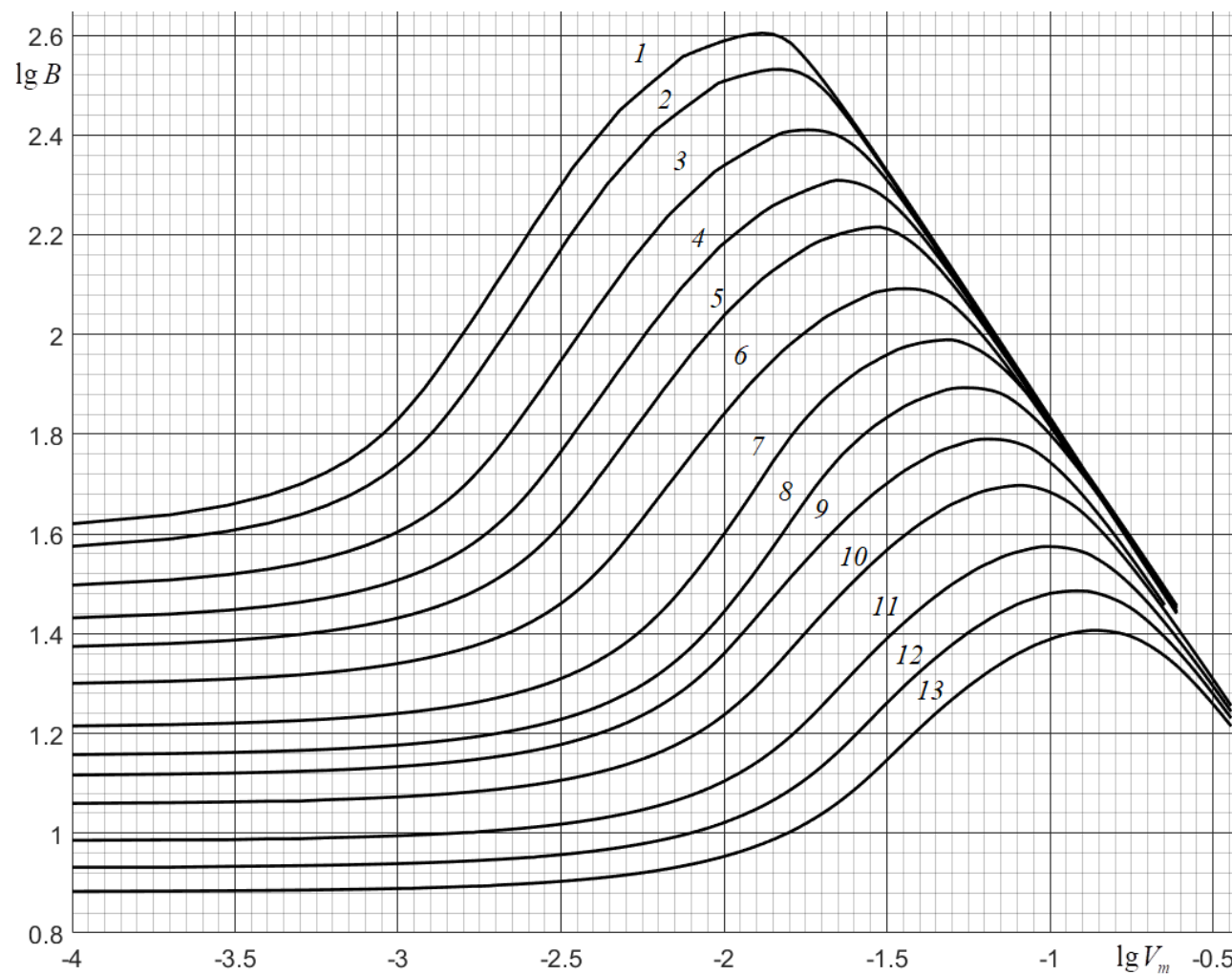


Рис. 4.3а. Зависимости $\lg B$ от $\lg V_m$ при различных значениях $H_{\min}$. Кривая 1 - $H_{\min} = 0.01$, 2 - $H_{\min} = 0.011$, 3 - $H_{\min} = 0.013$, 4 - $H_{\min} = 0.015$, 5 - $H_{\min} = 0.017$, 6 - $H_{\min} = 0.02$, 7 - $H_{\min} = 0.022$, 8 - $H_{\min} = 0.025$, 9 - $H_{\min} = 0.03$, 10 - $H_{\min} = 0.034$, 11 - $H_{\min} = 0.04$, 12 - $H_{\min} = 0.045$, 13 - $H_{\min} = 0.05$

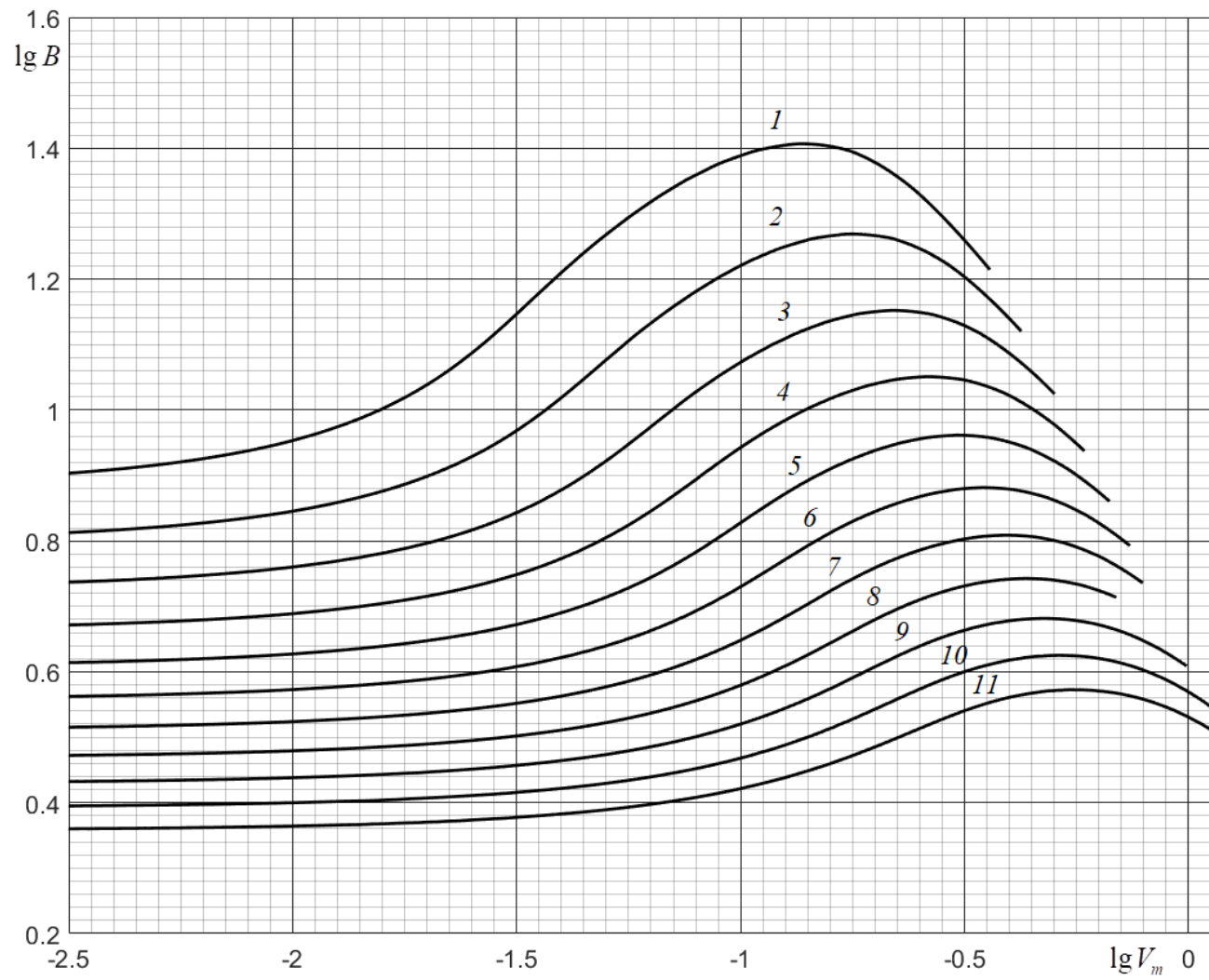


Рис. 4.36. Зависимости $\lg B$ от $\lg V_m$ при различных значениях $H_{\min}$. Кривая 1 - $H_{\min} = 0.05$, 2 - $H_{\min} = 0.06$, 3 - $H_{\min} = 0.07$, 4 - $H_{\min} = 0.08$, 5 - $H_{\min} = 0.09$, 6 - $H_{\min} = 0.10$, 7 - $H_{\min} = 0.11$, 8 - $H_{\min} = 0.12$, 9 - $H_{\min} = 0.13$, 10 - $H_{\min} = 0.14$, 11 - $H_{\min} = 0.15$

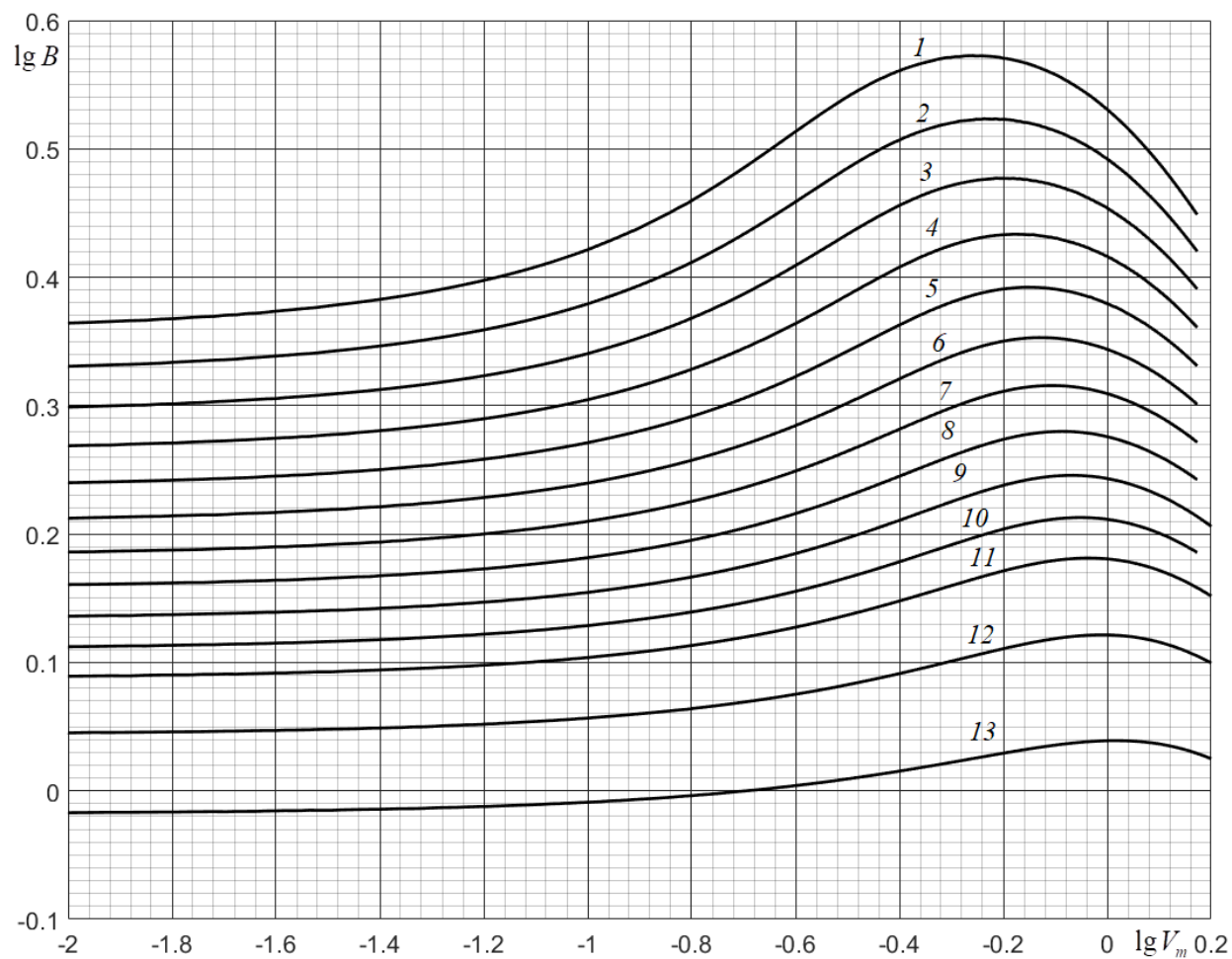


Рис. 4.3в. Зависимости $\lg B$ от $\lg V_m$ при различных значениях $H_{\min}$. Кривая 1 - $H_{\min} = 0.15$, 2 - $H_{\min} = 0.16$, 3 - $H_{\min} = 0.17$, 4 - $H_{\min} = 0.18$, 5 - $H_{\min} = 0.19$, 6 - $H_{\min} = 0.2$, 7 - $H_{\min} = 0.21$, 8 - $H_{\min} = 0.22$, 9 - $H_{\min} = 0.23$, 10 - $H_{\min} = 0.24$, 11 - $H_{\min} = 0.25$, 12 - $H_{\min} = 0.27$, 13 - $H_{\min} = 0.3$

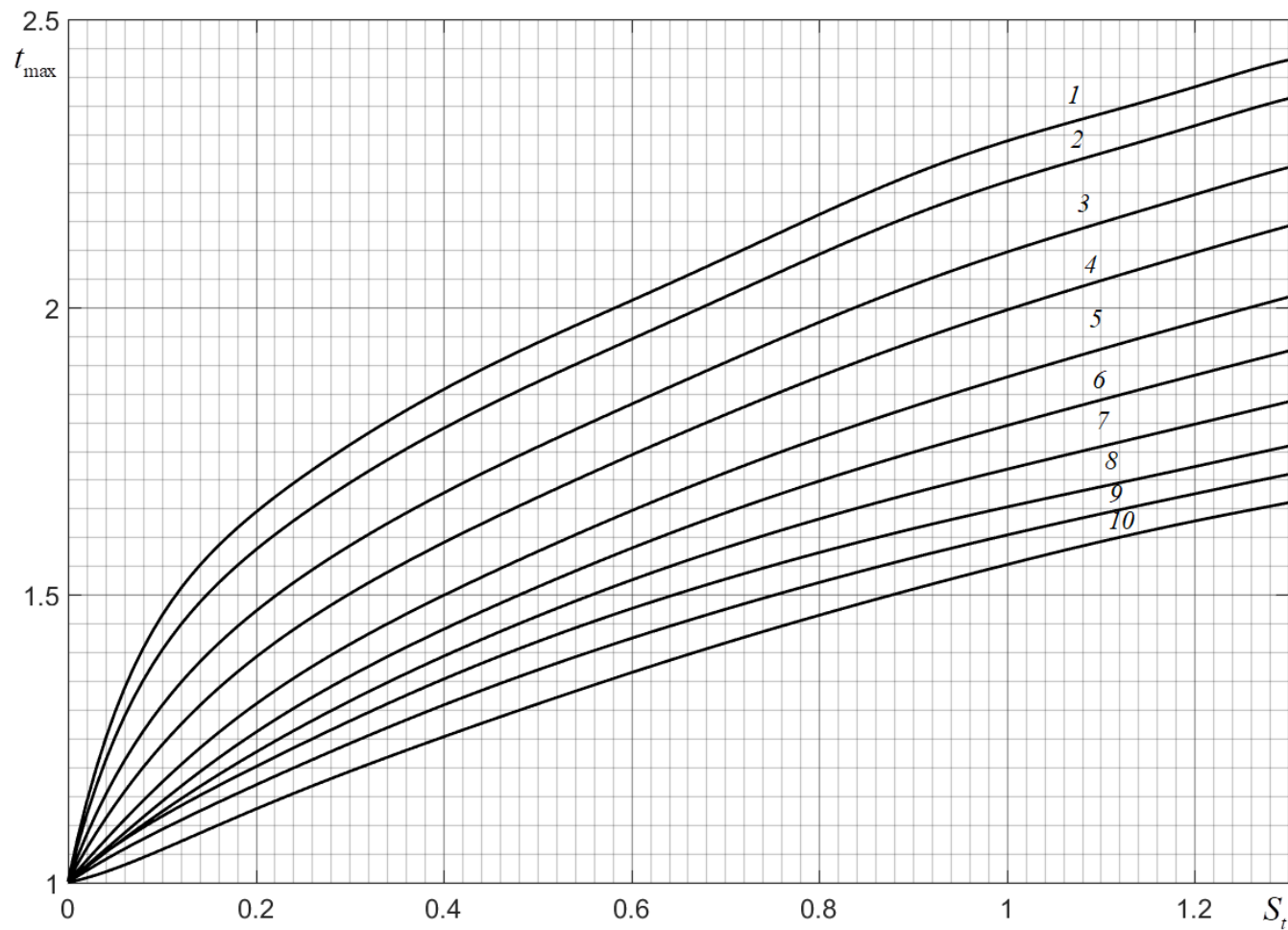


Рис. 4.4. Зависимости $t_{\max}$ от параметра $S_t = S/t_c^{(m+1)}$ при различных значениях $H_{\min}$. Кривая 1 - $H_{\min} = 0.01$, 2 - $H_{\min} = 0.02$, 3 - $H_{\min} = 0.04$, 4 - $H_{\min} = 0.06$, 5 - $H_{\min} = 0.09$, 6 - $H_{\min} = 0.12$, 7 - $H_{\min} = 0.16$, 8 - $H_{\min} = 0.22$, 9 - $H_{\min} = 0.3$, 10 - $H_{\min} = 0.4$,

Используя зависимости, приведенные на рис. 4.1-4.4, можно при заданных значениях входных параметров определить температуру смазочного материала на входе в рабочий зазор T_c , максимальную температуру в смазочном слое $T_{\max}$ и минимальную толщину смазочного слоя $h_{\min}$.

Входными параметрами являются:

E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона вала и подшипника, R - радиус вала, L - длина подшипника, ψ - относительный радиальный зазор, u - скорость скольжения, W - нагрузка на подшипник, μ_{40} - вязкость масла при температуре 40°C , m - коэффициент зависимости вязкости смазочного материала от температуры, T_{ex} - температура смазки на входе во входной карман. Рассмотрим случай, когда количество масла, прокачиваемого через подшипник, задано и равно Q . Расчет производим следующим образом.

1. Задаем относительную погрешность ε , с которой требуется определить минимальную безразмерную толщину смазочного слоя.

2. Находим вязкость смазки при температуре T_{ex} по формуле $\mu_{\text{ex}} = \mu_{40} \left(\frac{40}{T_{\text{ex}}} \right)^m$.

3. Вычисляем $S = \frac{\mu_{\text{ex}} u^2}{\lambda T_{\text{ex}}}$, $V_0 = \frac{48 \mu_{\text{ex}} u}{RE' \psi^3}$, $K_2 = \frac{L \mu_{\text{ex}} u^2}{\rho_0 c Q T_{\text{ex}} \psi}$.

4. Задаем начальное приближение безразмерной минимальной толщины смазочного слоя $H_{\min}$, которое обозначим $H_{\min}^{(0)}$.

5. По графику на рис. 4.2 находим значение параметра α_0 .

6. Решаем уравнение

$$(t_c - 1) = f(t_c) = K_2 \frac{q_T}{t_c^m} = K_2 \frac{q_{T,0}}{t_c^m} \exp \left(- \left(\alpha_T + 0.0584 \frac{V_0}{t_c^m} \right) \frac{S}{t_c^{(m+1)}} \right) \quad (4.2)$$

относительно t_c . Для этого задаем несколько значений t_c . При каждом

значении t_c вычисляем $V_c = \frac{V_0}{t_c^m}$, используя табл. 4.1, или графики на рис. 4.1

определяем $q_{T,0}$ и вычисляем правую часть выражения (4.2), равную значению

$f(t_c)$. Далее строим график зависимости $f(t_c)$. На этом же рисунке строим график зависимости $(t_c - 1)$ от параметра t_c .

Абсцисса точки пересечения графиков и будет решением уравнения (1.103) относительно t_c .

7. Вычисляем $S_t = S/t_c^{(m+1)}$ и по графикам на рис. 4.4 находим $t_{\max}$.

8. Вычисляем параметры $\mu_m = \frac{\mu_{\text{ex}}}{(t_c t_{\max})^m}$, $V_m = \frac{48\mu_m u}{RE'\psi^3} = \frac{V_0}{(t_c t_{\max})^m} = \frac{V_c}{t_{\max}^m}$ и $B = \frac{W\psi^2}{6\mu_m uL}$.

9. Используя графики на рис. 4.3 и полученные значения V_m и B определяем новое значение $H_{\min}$, которое обозначим $H_{\min}^{(1)}$.

10. Проверяем выполнение условия $|H_{\min}^{(0)} - H_{\min}^{(1)}|/H_{\min}^{(1)} < \varepsilon$.

11. Если это условие не выполняется, корректируем значение $H_{\min}$ и повторяем вычисления по пунктам 4 – 10. Коррекцию $H_{\min}$ и повторение вычислений по пунктам 4 – 10 повторяем до тех пор, пока условие в п. 9 не выполнится.

12. После выполнения условия в п. 9 определяем $h_{\min} = H_{\min}\psi R$, $T_c = t_c T_{\text{ex}}$, $T_{\max} = t_{\max} T_c$.

Примеры расчета рабочих параметров подшипников скольжения по инженерной методике.

Пример 1. Дано: $E = 200 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $R = 0.09 \text{ м}$, $L = 0.135 \text{ м}$, $\psi = 0.004$, $u = 10 \text{ м/с}$, $K = W/(2RL) = 8 \text{ МН/м}^2$, $W = 0.1944 \text{ МН}$, масло Т22, $\mu_{40} = 0.03$, $m = 2$, $T_{\text{ex}} = 30^\circ \text{С}$, $Q = 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$. Подшипник с такими параметрами испытывали экспериментально. Результаты экспериментов приведены в работе [47].

1. Задаем относительную погрешность определения безразмерной минимальной толщины смазочного слоя $\varepsilon = 0.05$.

2. Вычисляем $\mu_{\text{ex}} = 0.03 \left(\frac{40}{30} \right)^2 = 0.0533$.

3. Вычисляем $S = \frac{\mu_{\text{ex}} u^2}{\lambda T_{\text{ex}}} = \frac{0.0533 \cdot 10^2}{0.145 \cdot 30} = 1.225$,

$$V_0 = \frac{48\mu_{\text{ex}} u}{RE'\psi^3} = \frac{48 \cdot 0.0533 \cdot 10 \cdot (1 - 0.3^2)}{0.09 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot (0.004)^3} = 0.02,$$

$$K_2 = \frac{L\mu_{\text{ex}} u^2}{\rho_0 c Q T_{\text{ex}} \psi} = \frac{0.135 \cdot 0.0533 \cdot 10^2}{900 \cdot 1920 \cdot 1.9 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \cdot 0.004} = 0.0183$$

4. Принимаем $H_{\min}^{(0)} = 0.05$.

5. По графику на рис. 4.2 находим $\alpha_0 = 1$.

6. Принимаем $t_c = 1.05$. Вычисляем $V_c = \frac{V_0}{t_c^m} = \frac{0.02}{1.05^2} = 0.0181$. Используя графики

на рис. 4.1, находим, что при $H_{\min} = 0.05$, $V_c = 0.0181$ значение $\lg q_0 \approx 1.35$ и

$q_0 \approx 22.39$. Более точное значение q_0 можно определить, используя табл. 4.1.

При этом можно использовать билинейную интерполяцию.

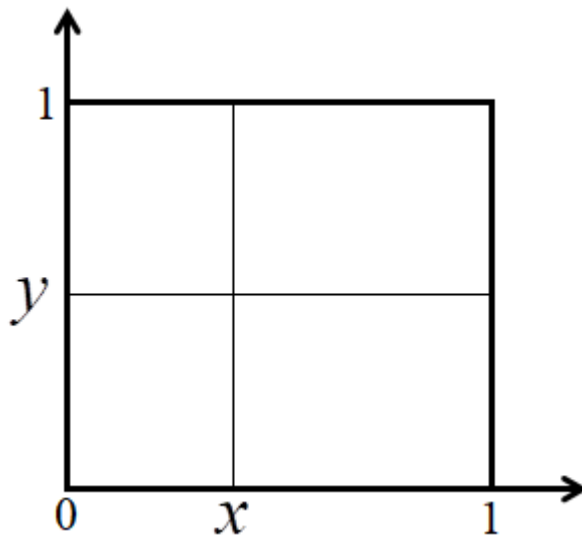


Рис. 4.5.

Формула билинейной интерполяции имеет вид (рис. 4.5)

$$f(x, y) = (1-x)(1-y)f(0,0) + x(1-y)f(1,0) + (1-x)yf(0,1) + xyf(1,1) \quad (4.3)$$

Применим эту формулу для определения q_0 . В качестве граничных точек

прямоугольной области на плоскости $(H_{\min}, \lg q_0)$ возьмем точки $(0.025, 1.52)$

(соответствует точке $(0,0)$ на рис. 4.5), $(0.05, 1.29)$ (соответствует точке $(1,0)$

на рис. 4.5), $(0.025, 1.72)$ (соответствует точке $(0,1)$ на рис. 4.5), $(0.05, 1.427)$

(соответствует точке 1 (1,1) на рис. 4.5). В формулу (4.3) подставляем

$$x = \frac{(0.05 - 0.025)}{(0.05 - 0.025)} = 1, \quad y = \frac{(0.0181 - 0)}{(0.05 - 0)} = 0.362, \quad f(0,0) = 1.52, \quad f(1,0) = 1.29, \quad f(1,0) = 1.732$$

, $f(1,1) = 1.427$. В результате получаем

$$\lg q_{T,0} = 1 \cdot (1 - 0.362) \cdot 1.29 + 1 \cdot 0.362 \cdot 1.427 = 1.3396, \quad q_{T,0} = 21.86. \text{ Вычисляем}$$

$$\begin{aligned} \Pr(t_c) &= K_2 \frac{q_{T,0}}{t_c^m} \exp \left(- \left(\alpha_0 + 0.0584 \frac{V_0}{t_c^m} \right) \frac{S}{t_c^{(m+1)}} \right) = \\ &= 0.0183 \frac{21.86}{1.05^2} \exp \left(- (1 + 0.0584 \cdot 0.0181) \frac{1.225}{1.05^3} \right) = 0.126 \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (4.2) при значении $t_c = 1.05$ равна 0.1257, левая часть равна 0.05. Отсюда следует, что $t_c > 1.05$. Проводим аналогичные вычисления при $t_c = 1.1$ и $t_c = 1.15$. Результаты приведены в табл. 4.2.

t_c	1.05	1.1	1.15
Pr	0.126	0.13	0.1322
$t_c - 1$	0.05	0.1	0.15

Из приведенных результатов следует, что можно принять $t_c = 1.13$.

7. Вычисляем $S_t = \frac{S}{t_c^{(m+1)}} = \frac{1.226}{1.13^3} = 0.85$. По графикам на рис. 4.4 находим

$$t_{\max} \approx 1.95.$$

8. Вычисляем параметры $\mu_m = \frac{\mu_{ex}}{(t_c t_{\max})^m} = \frac{0.0533}{(1.13 \cdot 1.95)^2} = 0.011,$

$$V_m = \frac{V_c}{t_{\max}^m} = \frac{0.0181}{1.95^2} = 0.0048, \quad \lg V_m = \lg(0.0048) = -2.32,$$

$$B = \frac{W\psi^2}{6\mu_m uL} = \frac{194400 \cdot 0.004^2}{6 \cdot 0.011 \cdot 10 \cdot 0.135} = 34.9, \quad \lg B = \lg 34.91 = 1.54.$$

9. По графикам на рис. 4.3а находим $H_{\min}^{(1)} \approx 0.021$.

10. Проверяем условие $|H_{\min}^{(0)} - H_{\min}^{(1)}| / H_{\min}^{(1)} < \varepsilon$. Имеем

$$|H_{\min}^{(0)} - H_{\min}^{(1)}| / H_{\min}^{(1)} = (0.05 - 0.021) / 0.021 = 1.38, \quad \varepsilon = 0.05, \text{ условие не выполняется.}$$

11. Задаем $H_{\min}^{(0)} \approx 0.018$ и повторяем вычисления по пунктам 5-10. Получаем $H_{\min}^{(1)} = 0.0159$. Условие $|H_{\min}^{(0)} - H_{\min}^{(1)}| / H_{\min}^{(1)} < 0.05$ не выполняется. Задаем $H_{\min}^{(0)} \approx 0.0159$ и повторяем вычисления по пунктам 5-10. Получаем $H_{\min}^{(1)} = 0.0154$ и $|H_{\min}^{(0)} - H_{\min}^{(1)}| / H_{\min}^{(1)} = 0.0325 < 0.05$. При этом получено: $t_c = 1.44$, $t_{\max} = 1.825$.

12. Принимаем $H_{\min} = 0.0154$ и вычисляем:

$$h_{\min} = H_{\min} \psi R = 0.0154 \cdot 0.004 \cdot 0.09 = 5.54 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5.54 \text{ мкм},$$

$$T_c = t_c T_{\text{ex}} = 1.44 \cdot 30 = 43.2^\circ \text{C} = 316.2^\circ \text{K}, \quad T_{\max} = t_{\max} T_c = 1.825 \cdot 43.2 = 78.84^\circ \text{C} = 351.8^\circ \text{K}.$$

В работе [47] получены следующие результаты экспериментальных исследований данного подшипника при данной скорости и данной нагрузке на подшипник: $h_{\min} = 6 \text{ мкм}$, $T_c = 313^\circ \text{K}$, $T_m = 350^\circ \text{K}$. Здесь T_m - средняя температура масла в нагруженной зоне подшипника. Данная температура должна быть меньше максимальной температуры в смазочном слое $T_{\max}$. Сопоставление результатов расчета и эксперимента показывает их хорошее совпадение.

В табл. 4.3 приведены экспериментальные и теоретические результаты для данного подшипника при других скоростях и нагрузках. Теоретические результаты получены по описанной инженерной методике, экспериментальные результаты приведены в работе [47].

Табл. 4.3.

ψ	$u, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$K, \text{МН}$	$h_{\min}, \text{мкм}$	$h_{\min}^e, \text{мкм}$	$T_c, ^\circ \text{K}$	$T_c^e, ^\circ \text{K}$	$T_{\max}, ^\circ \text{K}$	$T_m, ^\circ \text{K}$	$Q \cdot 10^4, \text{м}^3/\text{с}$
0.004	5	1.2	28.1	24	305.1	305	318	317	1.6
0.004	5	2.5	11.9	12	307.5	305.5	325	328	1.7
0.004	5	5.0	7.0	8	308.7	306.5	328	336	2
0.004	5	7.5	5.54	5.5	310	308.5	330	343	2
0.004	10	5.0	7.0	10	317	311	351	344	1.7
0.004	10	8.0	5.35	6	319	313	355	350	1.9

Теоретическими значениями являются $h_{\min}$, T_c , $T_{\max}$. Экспериментальными значениями являются $h_{\min}^e$ - экспериментальное значение минимальной толщины смазочного слоя, T_c^e - температура сливаемого масла в эксперименте, T_m - средняя температура масла в нагруженной зоне подшипника. В излагаемой математической модели принято допущение, что температура T_c^e равна температуре масла на входе в рабочий зазор, т. е. равна теоретическому значению T_c .

Расчеты по инженерной методике, как это видно на приведенном примере, требуют много вычислений. Данная методика запрограммирована в пакете Matlab. Коды данной программы приведены в приложении.

Рассмотрим случай, когда количество смазочного материала Q , прокачиваемого через подшипник, не задано, а определяется в процессе вычислений. В этом случае должно задаваться давление масла на входе в подшипник p_n и ширина зазора H_k между масляными карманами и торцами вкладыша. Безразмерное количество прокачиваемого смазочного материала $\bar{Q}$ определяется по формуле (1.106). В тяжело нагруженных опорах скольжения значение угла φ_δ близко к нулю. Если принять $\varphi_\delta = 0$, то выражение (1.106) приводится к виду

$$\bar{Q} = \frac{2\pi}{3} + 0.5436\lambda + 2\frac{H_k}{L} \left(\frac{2\pi}{3} + 3\sqrt{3}\lambda + \left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \lambda^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda^3 \right) \quad (4.3)$$

Относительный эксцентриситет λ в тяжело нагруженных опорах скольжения, как правило, больше единицы. Если он ниже единицы, то незначительно. При расчетах будем принимать $\lambda = 1$. В таком случае инженерная методика будет отличаться от приведенной выше инженерной методики при заданном расходе только пунктом 6, который в данном случае будет следующим

6. Вычисляем $\bar{Q} = 2.638 + 24.33 \frac{H_k}{L}$, $K_2' = \frac{6\mu_{\text{ex}}^2 u^2 L H_k}{\rho_0 c p_n T_{\text{ex}} R^4 \psi^4 \bar{Q}}$ и решаем уравнение

$$(t_c - 1) = f(t_c) = K_2' \frac{q_T}{t_c^{2m}} = K_2' \frac{q_{T,0}}{t_c^{2m}} \exp\left(-\left(\alpha_0 + 0.0584 \frac{V_0}{t_c^m}\right) \frac{S}{t_c^{(m+1)}}\right) \quad (4.4)$$

относительно t_c . Для этого задаем несколько значений t_c . При каждом значении t_c вычисляем $V_c = \frac{V_0}{t_c^m}$, используя табл. 4.1, или графики на рис. 4.1 определяем $q_{T,0}$ и вычисляем правую часть выражения (4.4), равную значению $f(t_c)$. Далее строим график зависимости $f(t_c)$. На этом же рисунке строим график зависимости $(t_c - 1)$ от параметра t_c .

Абсцисса точки пересечения графиков и будет решением уравнения (1.104) относительно t_c .

Пример 2. Подшипник, рассмотренный в предыдущем примере 1, но будем считать, что расход смазочного материала не задан. В монографии [50] не указано давление масла на входе в подшипник. Примем $p_n = 0.017 \text{ МПа}$. У подшипников с радиусом $R = 0.09 \text{ м}$ значение $H_k = 0.015 \text{ м}$ [49]. Выполняем расчеты:

1. $\varepsilon = 0.05$.

2. $\mu_{\text{ex}} = 0.03 \left(\frac{40}{30}\right)^2 = 0.0533$.

3. $S = \frac{\mu_{\text{ex}} u^2}{\lambda T_{\text{ex}}} = \frac{0.0533 \cdot 10^2}{0.145 \cdot 30} = 1.225$, $V_0 = \frac{48 \mu_{\text{ex}} u}{RE' \psi^3} = \frac{48 \cdot 0.0533 \cdot 10 \cdot (1 - 0.3^2)}{0.09 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot (0.004)^3} = 0.02$.

4. Принимаем $H_{\min}^{(0)} = 0.0154$.

5. По графику на рис. 4.2 находим $\alpha_0 = 1.18$.

6. Вычисляем $\bar{Q} = 2.638 + 24.3 \frac{H_k}{L} = 2.638 + 24.33 \cdot \frac{0.015}{0.135} = 5.34$,

$$K_2' = \frac{6 \mu_{\text{ex}}^2 u^2 L H_k}{\rho_0 c p_n T_{\text{ex}} R^4 \psi^4 \bar{Q}} = \frac{6 \cdot 0.0533^2 \cdot 10^2 \cdot 0.135 \cdot 0.015}{900 \cdot 1920 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 0.09^4 \cdot 0.004^4 \cdot 5.34} = 0.037$$

и решаем уравнение (4.4) относительно t_c . Процедура аналогична процедуре в примере 1. Задаем несколько значений t_c . Для каждого t_c вычисляем

$V_c = \frac{V_0}{t_c^m} = \frac{0.02}{t_c^m}$. Используя графики на рис. 4.1, при каждом значении t_c находим

значение $\lg q_0$, а затем q_0 . Далее вычисляем

$$\Pr(t_c) = K_2' \frac{q_{T,0}}{t_c^{2m}} \exp\left(-\left(\alpha_0 + 0.0584 \frac{V_0}{t_c^m}\right) \frac{S}{t_c^{(m+1)}}\right) \text{ и строим график зависимости } \Pr(t_c).$$

На этом же рисунке строим график зависимости $L(t_c) = t_c - 1$. Абсцисса точки пересечения прямой $L(t_c)$ и кривой $\Pr(t_c)$ и будет решением уравнения (4.4).

В результате выполнения всех процедур получаем $t_c = 1.45$.

7. Вычисляем $S_t = \frac{S}{t_c^{(m+1)}} = \frac{1.226}{1.45^3} = 0.4$. По графикам на рис. 4.4 находим

$$t_{\max} = 1.82.$$

8. Вычисляем $\mu_m = \frac{\mu_{\text{ex}}}{(t_c t_{\max})^m} = \frac{0.0533}{(1.45 \cdot 1.82)^2} = 0.0077$, $V_m = \frac{V_0}{(t_c t_{\max})^m} = \frac{0.02}{(1.45 \cdot 1.82)^2} = 0.0029$,

$$\lg(V_m) = -2.54, B = \frac{W\psi^2}{6\mu_m uL} = \frac{194400 \cdot 0.004^2}{6 \cdot 0.0077 \cdot 10 \cdot 0.135} = 49.9, \lg(B) = 1.7$$

9. По графикам на рис. 4.3а находим $H_{\min}^{(1)} \approx 0.0155$.

10. Условие $|H_{\min}^{(0)} - H_{\min}^{(1)}| / H_{\min}^{(1)} < \varepsilon$ выполняется. Принимаем $H_{\min} = 0.0154$.

Получаем $h_{\min} = 5.5 \text{ мкм}$, $T_c = 316.5^\circ \text{K}$, $T_{\max} = 352.2^\circ \text{K}$.

Находим размерный расход смазочного материала по формуле

$$Q = \frac{p_n \psi^3 R^4}{6\mu_{\text{ex}} H_k} t_c^m \bar{Q} = \frac{1.7 \cdot 10^4 \cdot 0.004^3 \cdot 0.09^4}{6 \cdot 0.0533 \cdot 0.015} \cdot 1.54^2 \cdot 5.34 = 1.87 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}.$$

При давлении масла на входе в подшипник, равном $p_n = 0.017 \text{ МПа}$, количество смазочного материала, прокачиваемого через подшипник, оказалось близким к экспериментальному количеству. Можно предположить, что эксперимент проводился при данном давлении.

Рассматриваемая инженерная методика также запрограммирована в пакете Matlab. Коды программ приведены в приложении.

Пример 3. Результаты расчета по программе в Матлабе для подшипника, рассмотренного в гл. 1, в примере 1. Подшипник с

параметрами: $\theta = \frac{\pi}{3} = 1.0472 \text{ рад} = 60^\circ$, $d = 0.275 \text{ м}$, $L = 0.26 \text{ м}$, $E = 220 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$,
 $\psi = 7.25 \cdot 10^{-4}$, $u = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, нагрузка $Q = 4.6 \cdot 10^5 \text{ Н}$, масло T_{22} , $\mu_{40} = 0.03$, $m = 2$,
 $T_{\text{ex}} = 40^\circ \text{C}$. Давление масла на входе в подшипник примем равным
 $p_n = 0.2 \text{ МПа}$. Результаты расчета следующие: $h_{\text{min}} = 9.6 \text{ мкм}$, $T_c = 42.8^\circ \text{C}$,
 $T_{\text{max}} = 43.2^\circ \text{C}$. На рис. 4.6 приведены коды головной программы расчета
подшипника по инженерной методике и результаты расчета.

```

Editor - D:\THEORY_OF_LUBRICATION\DIS_U\NEW_VARIANT\CALC_MATLAB\BEARING_Qn\R_0p1375.m
R_0p1375.m
1 - clear;
2 - clc;
3 - R=0.1375;%радиус [м]
4 - L=0.26;%Осевая длина вкладыша
5 - psi=0.000725;%Относительный зазор psi=зазор/R
6 - u=1;%Скорость скольжения
7 - W=4.6e+5;%Нагрузка на подшипник
8 - vis_40=0.03;% Вязкость масла при 40 градусpx поЦельсию [Па*сек]
9 - m=2.0;%Кoeffициент зависимости вязкости масла от температуры
10 - tvx=40;%Температура масла на входе в подшипник
11 - H=0.02;%Ширина зазора между масляными карманами и торцами вкладыша
12 - p_n=2e+5;%Давление масла на входе в подшипник
13 - hm=0.05;%Начальное приближение для безразмерной минимальной толщины...
14 -                                     %смазочного слоя
15 - res=Calc_Bearing(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,W,H,p_n);
16 - hdim=res(1)%Минимальная размерная толщина смазочного слоя [мкм]
17 - tc=res(2)%Температура сливаемого из подшипника масла [градус Цельсия]
18 - tmax=res(3)%Максимальная температура в смазочном слое [градус Цельсия]
19
Command Window
hdim =
    9.579391533322641
tc =
    42.800000000000004
tmax =
    43.213257637352932

```

Рис. 4.6

Решение полной системы уравнений неізотермической задачи в данном случае следующее: $h_{\min} = 9.8 \text{ мкм}$, $T_c = 42.2^\circ\text{C}$, $T_{\max} = 42.8^\circ\text{C}$. Результаты расчетов по инженерной методике близки к решению полной системы уравнений. Экспериментальная зависимость толщины смазочного слоя от угловой координаты приведена на рис. 1.35

Пример 4. Подшипник с параметрами: $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, $d = 0.18 \text{ м}$, $L = 0.135 \text{ м}$,

$\psi = 0.001$, $u = 6.6 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, $W = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Н}$, масло T_{22} , $\mu_0 = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $T_0 = 40^\circ\text{C}$, $m = 2$,

$p_n = 0.35 \text{ МПа}$. Экспериментальная и теоретическая зависимости толщины смазочного слоя от угловой координаты приведены на рис. 1.36. Теоретическая зависимость получена путем решения полной системы уравнений неізотермической задачи. Расчеты по инженерной методике дают: $h_{\min} = 21 \text{ мкм}$, $T_c = 50^\circ\text{C}$, $T_{\max} = 56.5^\circ\text{C}$.

The image shows a MATLAB editor window with a script for calculating bearing parameters. The script defines various physical parameters and uses a function 'Calc_Bearing_Q' to calculate results. The command window displays the output of the script, showing the minimum film thickness (hdim), temperature at the exit (tc), and maximum temperature (tmax).

```
Editor - D:\THEORY_OF_LUBRICATION\DIS_U\NEW_VARIANT\CALC_MATLAB\BEARING_Qn\R_0p09_Q.m
R_0p1375.m  R_0p09_Q.m  +
1 - clear;
2 - clc;
3 - R=0.09;%радиус [м]
4 - L=0.135;%Осевая длина вкладыша
5 - psi=0.004;%Относительный зазор psi=зазор/R
6 - u=10;%Скорость скольжения
7 - K=8e+6;%Удельная нагрузка в подшипнике
8 - W=K*L*2*R;%Нагрузка на подшипник
9 - vis_40=0.03;% Вязкость масла при 40 градусах по Цельсию [Па*сек]
10 - m=2.0;%Коэффициент зависимости вязкости масла от температуры
11 - tvx=30;%Температура масла на входе в подшипник
12 - Rac=190.0e-6;%Общее количество масла, прокачиваемого через подшипник
13 - hm=0.01;%Начальное приближение для безразмерной минимальной толщины...
14 -                                     %смазочного слоя
15 - res=Calc_Bearing_Q(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,Rac,W);
16 - hdim=res(1)%Минимальная размерная толщина смазочного слоя [мкм]
17 - tc=res(2)+273%Температура сливаемого из подшипника масла [градус Кельвина]
18 - tmax=res(3)+273%Максимальная температура в смазочном слое [градус Кельвина]

Command Window
hdim =
    5.347770054637215

tc =
    3.189000000000000e+02

tmax =
    3.545013871754076e+02

>>
```

Рис. 4.7

На рис. 4.7 приведены коды головной программы расчета по инженерной методике и результаты расчета подшипника при известном общем количестве масла, прокачиваемого через подшипник. Приведенные на рис. 4.7 результаты расчетов внесены в табл. 4.3.

4.2. Инженерная методика расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимального давления в смазочном слое в локальном контакте упругих тел

Входными параметрами в УГД задаче для внешнего контакта упругих тел являются параметры $G = \alpha p_g$, $V = \frac{3\pi^2 \mu_0 u R' E'}{W^2}$, $C_1 = p_g \tilde{C}_1$, и $C_2 = p_g \tilde{C}_2$. Значения параметров $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ для смазочных материалов близки к следующим значениям: $\tilde{C}_1 \approx 0.6(1/ГПа)$, $\tilde{C}_2 \approx 1.7(1/ГПа)$. Параметры C_1 и C_2 учитывают влияние давления на плотность смазочного материала. С ростом характерного давления p_g смазочный материал сжимается и его плотность растет. Сжимаемость смазочного материала приводит к понижению второго пика давления.

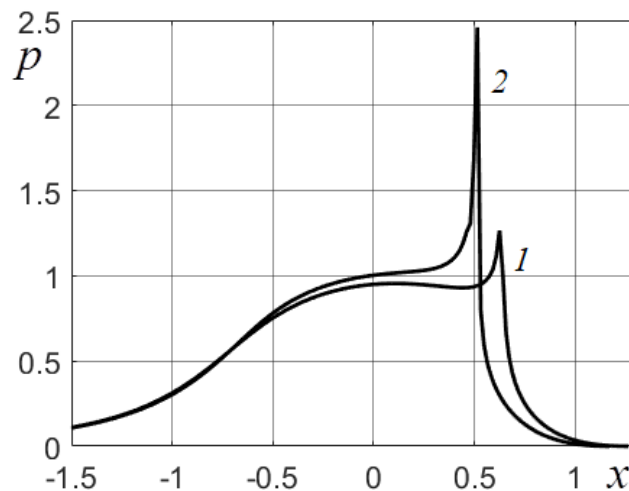


Рис. 4.8

Данное обстоятельство иллюстрируют кривые, приведенные на рис. 4.8, на котором приведены зависимости $p(x)$, полученные при значениях параметров $V=1$, $G=8$ и при различных значениях параметров C_1, C_2 . Кривая 1 получена при значениях параметров $C_1=0.6$, $C_2=1.7$, что

соответствует $p_g = 1 \text{ ГПа}$, а кривая 2 - при значениях параметров $C_1 = 0.01$, $C_2 = 0.0285$, что соответствует $p_g = 0.017 \text{ ГПа}$.

Таким образом, при фиксированных значениях параметров V , G и с ростом давления p_g , чему соответствует рост значений параметров C_1, C_2 , максимальное давление в области существования второго пика давления падает. Однако это падение осуществляется при малых значениях p_g , что иллюстрирует кривая на рис. 4.9а, которая получена следующими вычислениями. Принималось $V=1$, $G=8$ и значение давления p_g изменялось в интервале от 0 до 1.4 ГПа. Определялись безразмерные параметры $C_1 = 6 \cdot 10^{-10} p_g$, $C_2 = 1.7 \cdot 10^{-9} p_g$. При значениях $V=1$, $G=8$ и полученных значениях C_1, C_2 решалась УГД задача, и определялись значения $h_m = \min_x h(x)$, $p_m = \max_x p(x)$. Из приведенных на рис. 4.9 зависимостей следует, что сжимаемость смазочного материала слабо влияет на минимальную толщину смазочного слоя при изменении p_g в интервале $0 \leq p_g \leq 1.4$ и на максимальное давление в смазочном слое в интервале $0.4 \leq p_g \leq 1.4$.

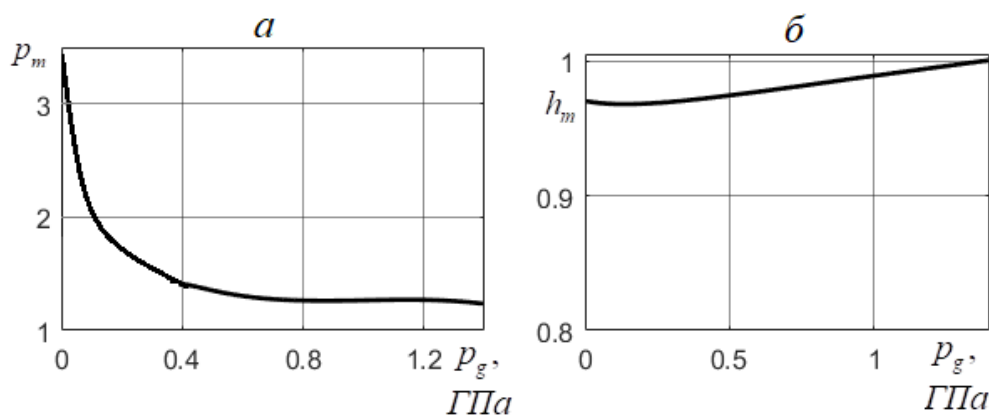


Рис. 4.9

На рис. 4.10а и 4.10б приведены графики зависимостей $\frac{h_m}{V}$ от $\lg V$ при значениях $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$ и при различных значениях параметра G .

Данным значениям C_1, C_2 соответствует $p_g = 177 \text{ Па}$. На рис. 4.10в приведены графики зависимостей h_m от $\lg V$ при тех же значениях $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$ и G . В табл. 4.4 приведено соответствие номера кривой и значения параметра G .

Табл. 4.4.

Номер кривой	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Значение G	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	20

На рис. 4.11 приведены графики зависимостей p_m от $\lg V$ при значениях $C_1 = 0.6$, $C_2 = 1.7$ и при различных значениях параметра G . В табл. 4.5 приведено соответствие номера кривой и значения параметра G .

Табл. 4.5

Номер кривой	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Значение G	0	1	2	3	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	8.5	10
Номер кривой	14	15			16		17						
Значение G	12.5	15			17.5		20						

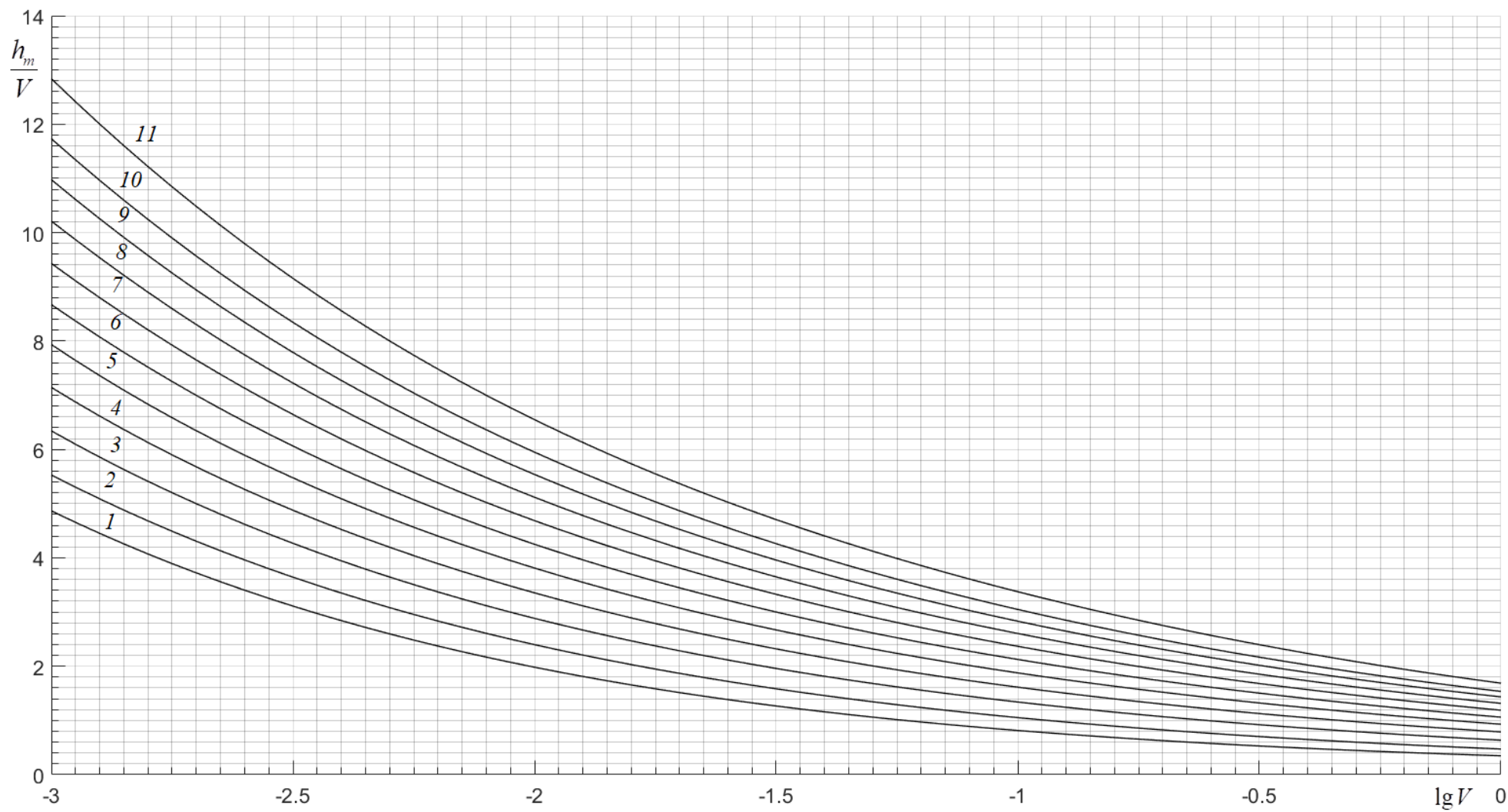


Рис. 4.10a

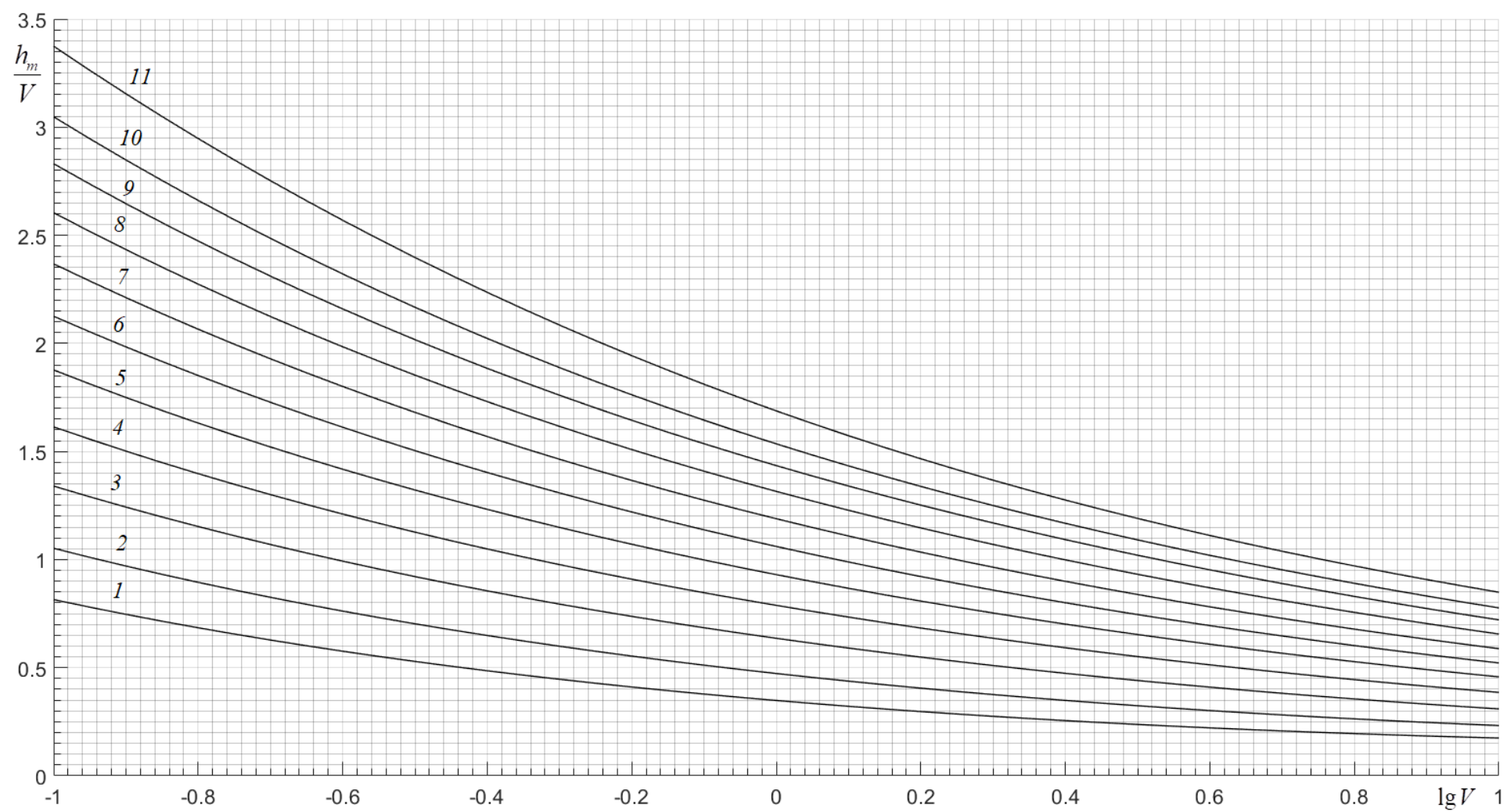


Рис. 4.106

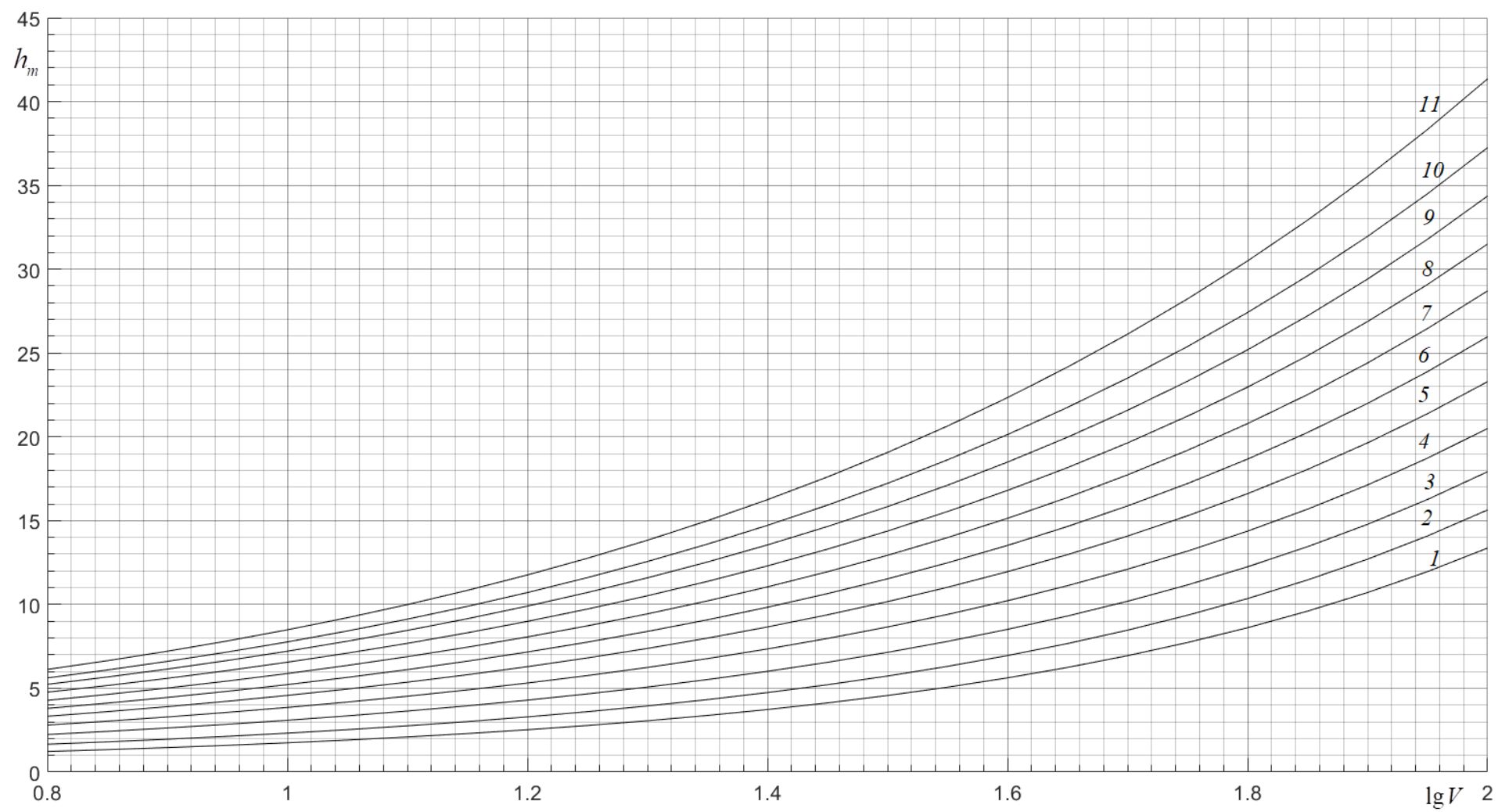


Рис. 4.10б

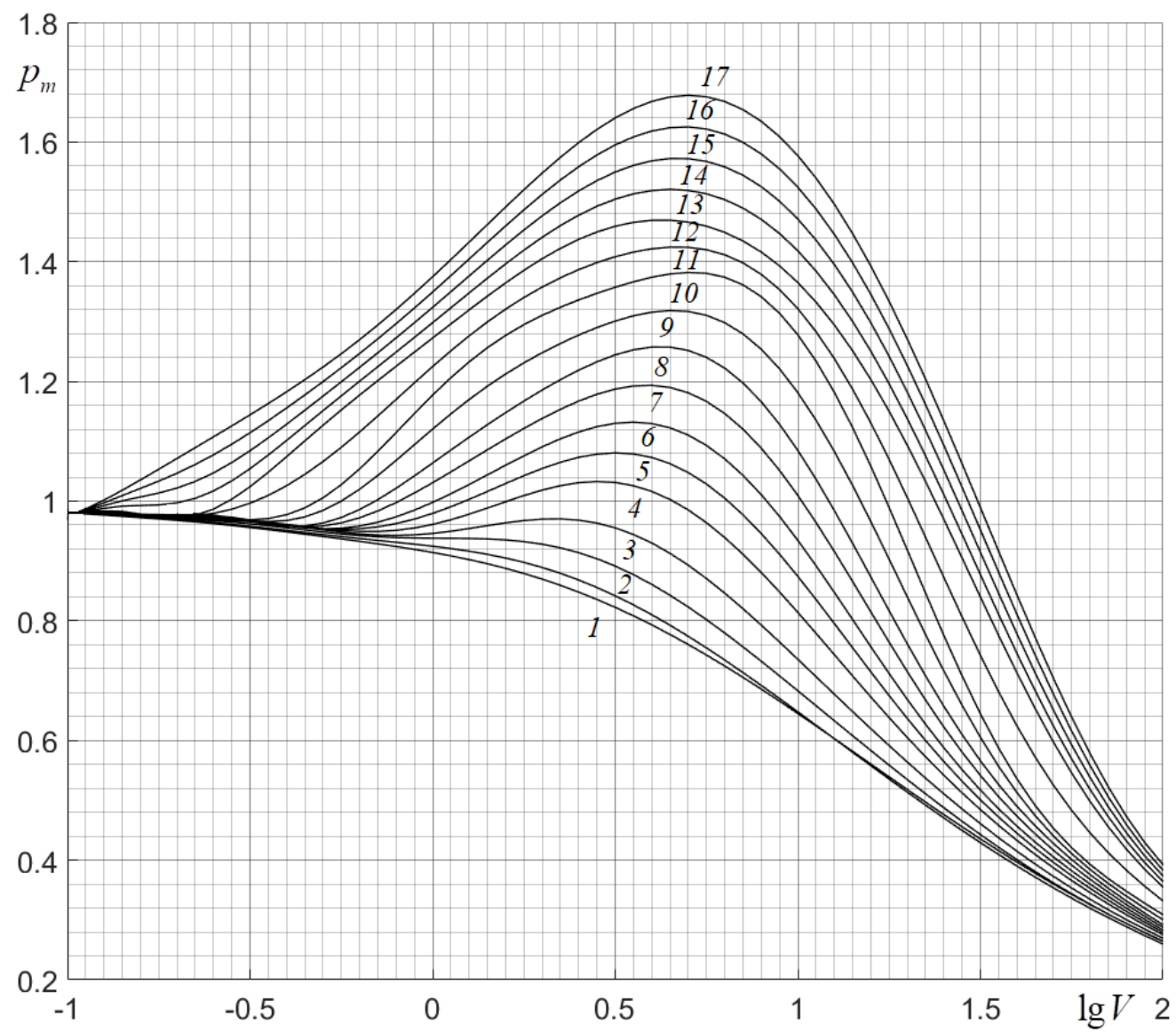
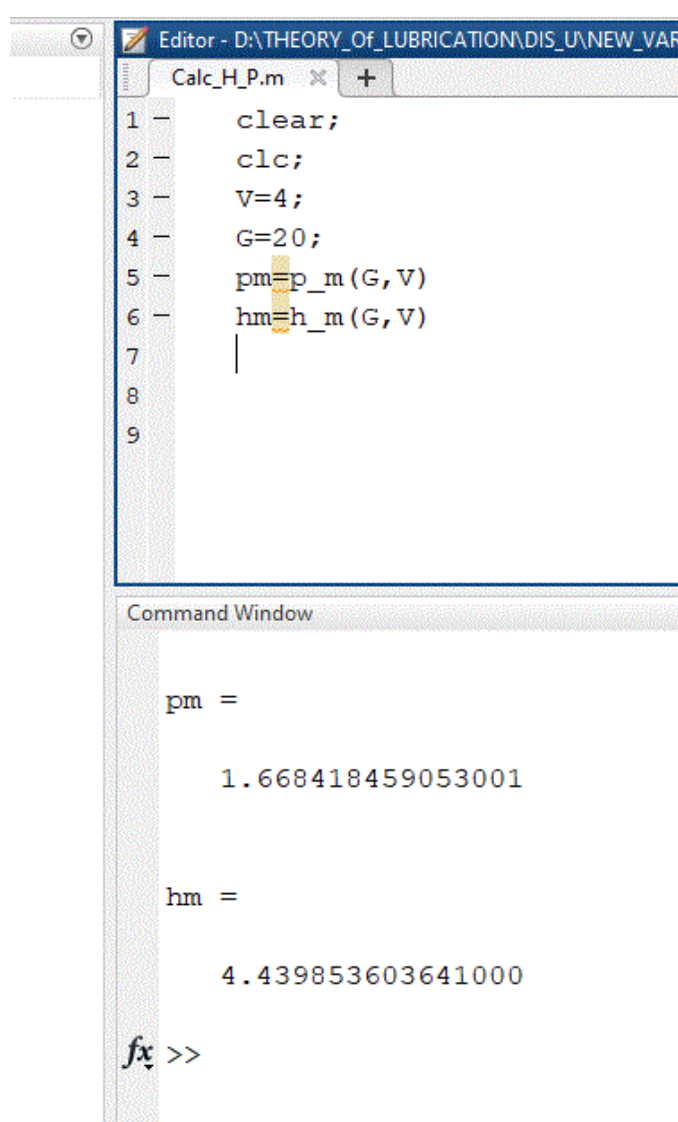


Рис. 4.11

Кривые, приведенные на рис. 4.10 и 4.11 запрограммированы в среде Матлаб. Коды программ приведены в приложении. Программа – функция $h_m.m(G,V)$ вычисляет значение h_m при заданных значениях параметров G и V . Программа – функция $p_m.m(G,V)$ вычисляет значение p_m при заданных значениях параметров G и V .

На рис. 4.12 приведен пример программы для Матлаб с результатами вывода.



```
Editor - D:\THEORY_Of_LUBRICATION\DIS_U\NEW_VARS\Calc_H_P.m
1 - clear;
2 - clc;
3 - V=4;
4 - G=20;
5 - pm=p_m(G,V)
6 - hm=h_m(G,V)
7 - |
8
9

Command Window

pm =

    1.668418459053001

hm =

    4.439853603641000

fx >>
```

Рис. 4.12

Приведенные программы для Матлаб позволяют вычислять h_m при значениях параметров $0.001 \leq V \leq 1000$, $0 \leq G \leq 20$ и p_m при значениях параметров $0 \leq V \leq 100$, $0 \leq G \leq 20$.

Выводы по главе 4

В четвертой главе приведены инженерные методики расчета радиального подшипника скольжения с частичным углом охвата с учетом деформаций поверхностей трения и параметров внешнего локального контакта упругих цилиндров при наличии слоя вязкой смазочной жидкости.

Инженерная методика расчета подшипника скольжения позволяет определить минимальную толщину смазочного слоя в среднем сечении и максимальную температуру в смазочном слое.

Применительно к локальному контакту инженерная методика позволяет определить максимальное давление в смазочном слое и минимальную толщину смазочного слоя в интервале значений коэффициента жесткости $0.001 < V < 100$.

Инженерные методики запрограммированы в Матлабе. Коды программ приведены в приложении.

ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

5.1. Методика исследований

Для обеспечения жидкостного трения в подшипниках скольжения необходимо, чтобы трущиеся поверхности всегда была разделены слоем смазки. Поэтому определение толщины смазочного слоя при различных режимах работы подшипника представляет собой важную практическую задачу, решение которой позволяет сделать вывод относительно характера работы подшипника. Как следует из теоретических исследований, деформации поверхностей трения существенно изменяют форму зазора в подшипнике. Поэтому сопоставление теоретических и экспериментальных данных по определению толщины смазочного слоя позволит судить о правильности разработанной методики расчёта подшипника скольжения конечной длины.

В настоящее время наиболее широкое распространение получил емкостной метод замера толщины смазочного слоя. В этом методе в качестве датчика используется электрический конденсатор, состоящий из электрода, заделанного во вращающийся вал, поверхности вкладыша и разделяющей их масляной плёнки ϵ . Электрод изолируется от вала слюдой. Его наружная поверхность, представляющая собой часть поверхности вала, играет роль подвижной обкладки конденсатора. Вкладыш является обкладкой конденсатора, а масляная плёнка между валом и вкладышем – диэлектриком. Емкость конденсатора зависит от расстояния между его обкладками, то есть от толщины масляной пленки в той точке, где на данный момент находится электрод.

Благодаря вращению электрода вместе с валом имеется возможность

непрерывно измерять толщину масляной пленки по всей окружности подшипника. Закрепив в вал электроды в нескольких сечениях, можно определить толщину смазочной пленки по всей длине подшипника.

Большое количество экспериментальных данных по толщине смазочного слоя, полученных емкостным методом на подшипниках с различными значениями относительного зазора ψ в широком диапазоне скоростей и нагрузок, опубликовано Ф.П. Снеговским и И.А. Тодером. В связи с этим в данной работе не ставится задача экспериментального исследования толщины смазочного слоя в подшипниках скольжения.

Для нормальной работы подшипника необходимо, чтобы максимальная температура в нём не превышала предельной величины, зависящей от антифрикционных свойств покрытия и смазки. В рабочей зоне подшипника, в области высокого давления и температуры критерием для ограничения максимальной температуры является критическая температура, при которой масло теряет смазочную способность.

В связи с этим большой интерес представляет определение температуры в смазочном слое, что позволяет сделать выводы о работоспособности подшипника. Однако измерение температуры масла в несущем слое без нарушения нормальных условий работы подшипника представляет собой трудную техническую задачу. В связи с этим при исследованиях измерение температуры масла заменяют измерением температуры металла в непосредственной близости от рабочей поверхности; омываемой маслом. С некоторой погрешностью по измеряемой температуре можно судить о температуре омывающей поверхность в данной точке масла. Погрешность измерения тем меньше, чем меньшая толщина металла отделяет точку непосредственного измерения от исследуемой поверхности.

К настоящему времени, таким методом выполнено большое количество экспериментальных исследований температуры в подшипнике. Однако, экспериментальные данные, опубликованные в этих работах, получены на подшипниках с относительно малыми диаметрами (до 200 мм). В то же время

диаметр: подшипников, используемых в качестве опор валков прокатных станов, доходит до 1600. Поэтому большой интерес представляет экспериментальное определение температуры в крупногабаритных подшипниках, так как это позволит определить влияние масштабного фактора на точность разработанной методики расчёта высокоскоростных и тяжело нагруженных опор скольжения.

Основной целью экспериментальной части данной работы является исследование температуры в крупногабаритном подшипнике в широком диапазоне скоростей и нагрузок. Эксперименты проводились на подшипнике с диаметром подшипника 550 мм. В процессе эксперимента измерялись следующие параметры:

1. Температура в зоне трения и температура масла на входе в подшипник.
2. Нагрузка на подшипник.
3. Скорость вращения вала,
4. Давление масла на входе в подшипник.

Температура масла, подаваемого в подшипник, замерялась с помощью термопары, заделанной в напорный трубопровод на входе в подшипник. Нагрузка на подшипник равна произведению давления в гидроцилиндре на площадь поршня. Число оборотов вала измерялось тахогенератором. Давление масла на входе в подшипник измерялось манометром.

Для замера температуры в зоне трения на расстоянии 0.8 – 1 мм от поверхности трения втулки — вкладыша к баббиту своим спаем привариваются хромель - алюмелевые термопары. Общее количество термопар, заделанных в испытываемую втулку, равно 15. Схема расположения термопар показана на рис. 5.1. Схема заделки термопар показана на рис. 5.2.

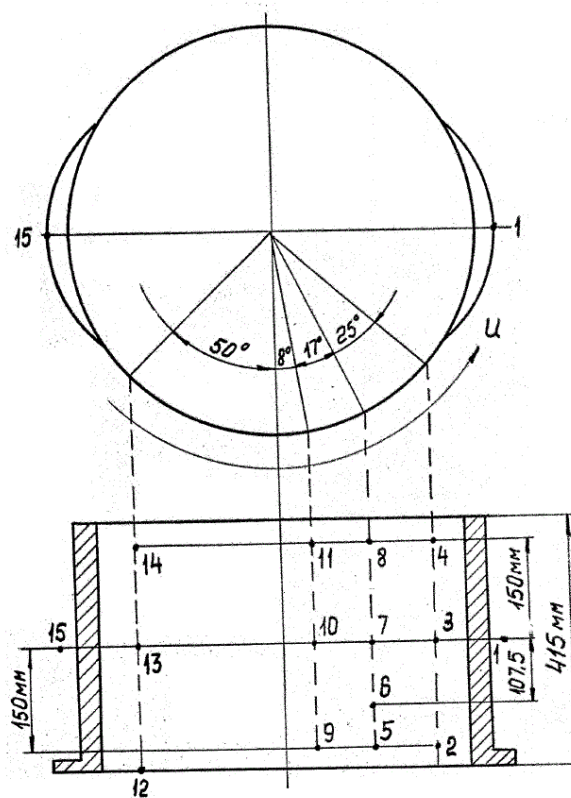


Рис. 5.1. Схема расположения термопар.

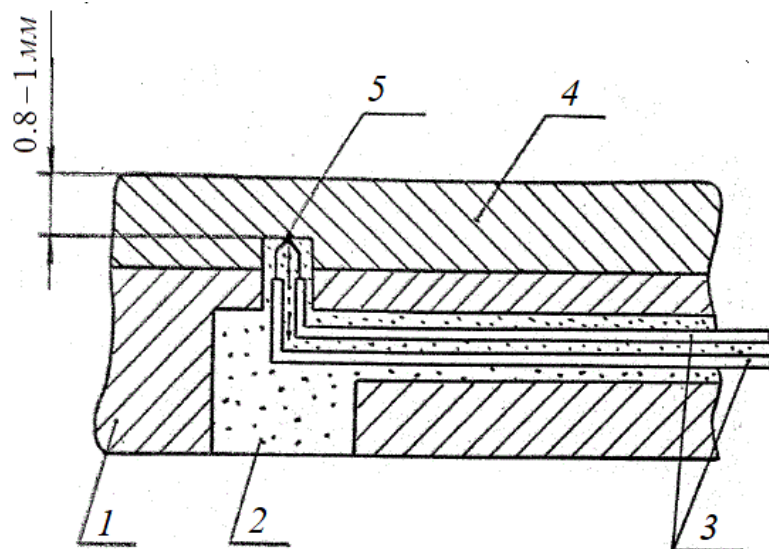


Рис. 5.2. Схема заделки термопар. 1 – стальная втулка, 2 – эпоксидная смола, 3 – выводы термопар, 4 – баббит, 5 – место приварки.

Оценим погрешность принятой методики определения температуры в смазочном слое подшипника. Покажем, что замеряемая в опыте температура

слабо отличается от температуры на поверхности вкладыша, а следовательно, и от температуры масла, находящегося в контакте с вкладышем. Для этого оценим величину разности между температурой на поверхности вкладыша и температурой вкладыша на глубине от его поверхности порядка 1 мм. Рассмотрим концентрическое кольцо, на внутренней поверхности которого температура равна t_1 , а на наружной - t_2 . Пусть R будет внутренним радиусом кольца, R_1 - наружным, а ζ - координатой, направленной по радиусу. Тогда распределение температуры в кольце будет иметь вид:

$$t = t_1 + (t_2 - t_1) \ln\left(\frac{\zeta}{R}\right) / \ln\left(\frac{R_1}{R}\right) \quad (5.1)$$

Из равенства (5.1) получаем, что разность между температурой на внутренней поверхности кольца и температурой кольца в точке, расположенной на расстоянии δ от внутренней поверхности, будет равна

$$\Delta t = (t_2 - t_1) \frac{\ln(1 + \delta/R)}{\ln(R_1/R)} \quad (5.2)$$

Так как $\delta/R \ll 1$, выражение (5.2) можно записать в виде

$$\Delta t = (t_2 - t_1) \frac{\delta}{R \ln(R_1/R)} \quad (5.3)$$

В опорах прокатных валков $R_1/R \approx 2$. При $\delta = 1 \text{ мм}$ и $R = 0.275 \text{ м}$ значение $\Delta t \approx 0.005(t_2 - t_1)$. Таким образом, приведённые выше оценки показали, что замеряемая в опыте температура с достаточно высокой точностью соответствует температуре на поверхности вкладыша.

5.2. Конструкция испытательного стенда

Схема испытательного стенда приведена на рис. 5.3. Он состоит из следующих узлов:

1. Электродвигатель постоянного тока мощностью 630 кВт с диапазоном регулирования скорости вращения от 16 до 1000 об/мин.
2. Приводной вал с муфтами.
3. Подшипник стенда ПЖТ-400.
4. Станина.
5. Подшипник стенда ПЖТ-710 с фиксацией в осевом направлении.
6. Испытуемый подшипник диаметром 550 мм.
7. Нагрузочное силовое устройство с силовым гидравлическим узлом.
8. Гидравлический цилиндр радиального нагружения.

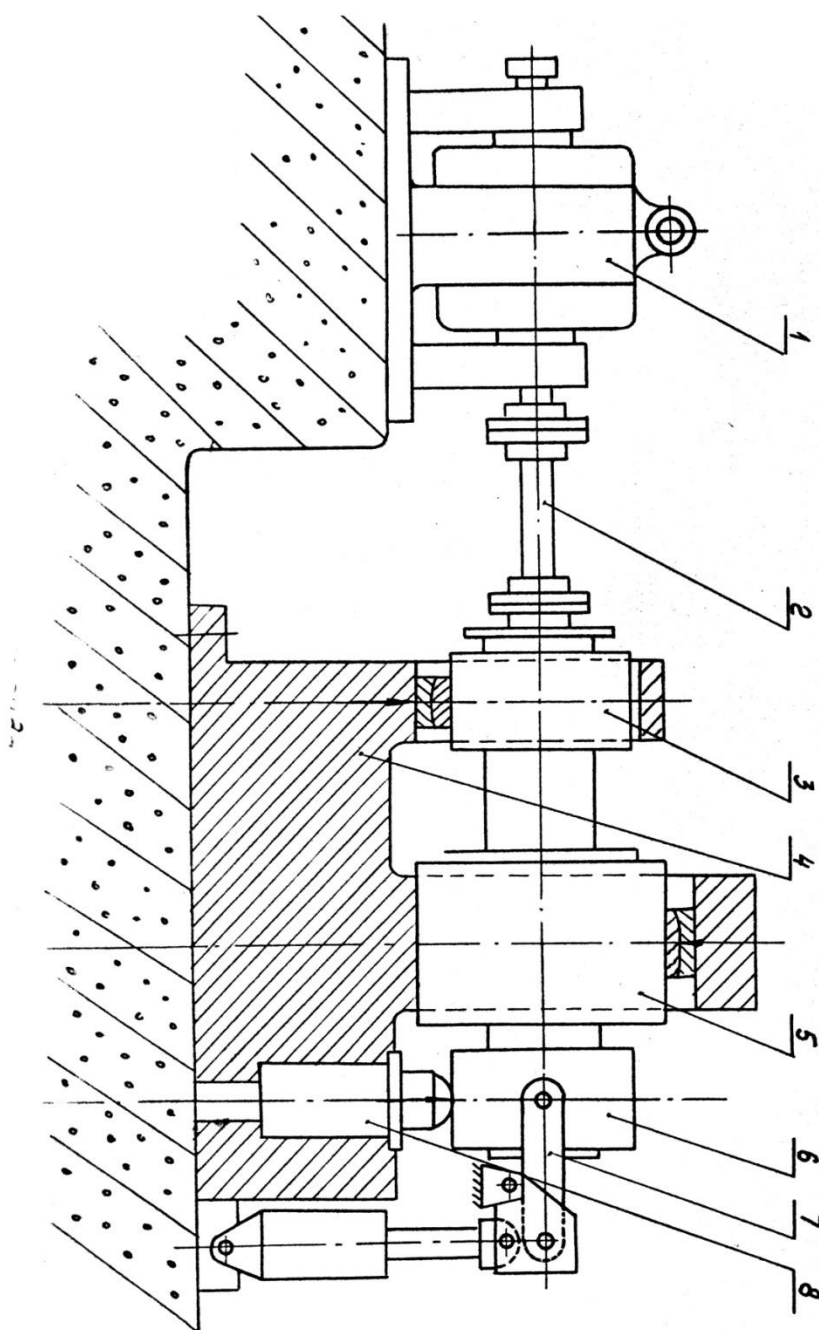


Рис. 5.3. Схема стенда

Испытуемый подшипник расположен на консольном валу, что соответствует положению подшипника на конце прокатного валка при эксплуатации. Радиальная нагрузка на подшипник передается от гидравлического устройства через сферическую опору, чем обеспечиваются

условия для самоустановки подшипника. Максимальная нагрузка на испытываемый подшипник равна $W_{oc} = 5 \cdot 10^5 \text{ Н}$.

5.3. Результаты испытаний

По описанной методике были проведены экспериментальные исследования температуры в подшипнике. Эксперименты проводились на двух маслах: П-28 и Т-30 в широком диапазоне скоростей и нагрузок. Максимальные значения нагрузки на подшипник и скорости в опыте определялись условием не превышения наибольшей температуры в зоне трения значения 120°C .

Результаты испытаний приведены в табл. 5.1 и 5.2. На рис. 5.4 и 5.5 приведено сопоставление экспериментальных и теоретических результатов по максимальной температуре.

Таблица 5.1.

Масло П-28

$u \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$		2.6	6.1	8.1	10.1	2.6	4.9	6.9
$q_{cp} [\text{МПа}]$		10.5	10.5	10.5	11.0	14.2	14.2	14.2
$T_{ex} [^{\circ}\text{C}]$		38	42	40	41	39	40	37
$p_n [\text{МПа}]$		1.8	1.0	1.5	1.2	1.9	1.4	1.2
$T [^{\circ}\text{C}]$	1	42	46	43	45	41	43	43
	2	50	64	70	79	51	61	67
	3	56	73	79	88	56	68	74
	4	58	68	72	80	63	78	80
	5	57	72	80	89	56	68	74
	6	57	73	81	91	56	68	74
	7	65	90	101	110	65	80	90
	8	61	85	91	103	80	104	116
	9	57	75	82	91	59	70	77
	10	69	98	106	118	70	88	98
	11	56	75	81	90	61	78	85
	12	52	63	68	72	55	63	62
	13	57	77	82	91	60	73	81
	14	56	74	78	84	68	88	100
	15	53	66	68	72	56	64	69

Таблица 5.2.

Масло Т-30

$u \left[\frac{м}{с} \right]$		3.5	6.0	8.4	10.7	6.9	9.5	13.5
$q_{cp} [МПа]$		11	11	11	11	7.2	7.2	7.2
$T_{ex} [^{\circ}C]$		40	40	40	40	40	40	40
$p_n [МПа]$		2.0	2.0	2.0	2.3	2.0	1.8	2.0
$T [^{\circ}C]$	1	40	40	40	41	39	40	42
	2	40	40	40	41	49	56	65
	3	42	48	50	56	57	66	77
	4	52	63	69	78	51	59	64
	5	53	58	76	89	55	62	73
	6	48	54	59	66	60	69	79
	7	58	70	78	87	63	76	93
	8	58	71	82	101	53	61	70
	9	47	54	59	66	57	64	76
	10	58	71	80	89	66	79	96
	11	56	72	82	101	51	59	69
	12	48	56	60	68	51	58	62
	13	58	71	80	89	57	63	72
	14	58	72	82	101	48	51	55
	15	46	51	64	59	50	52	59

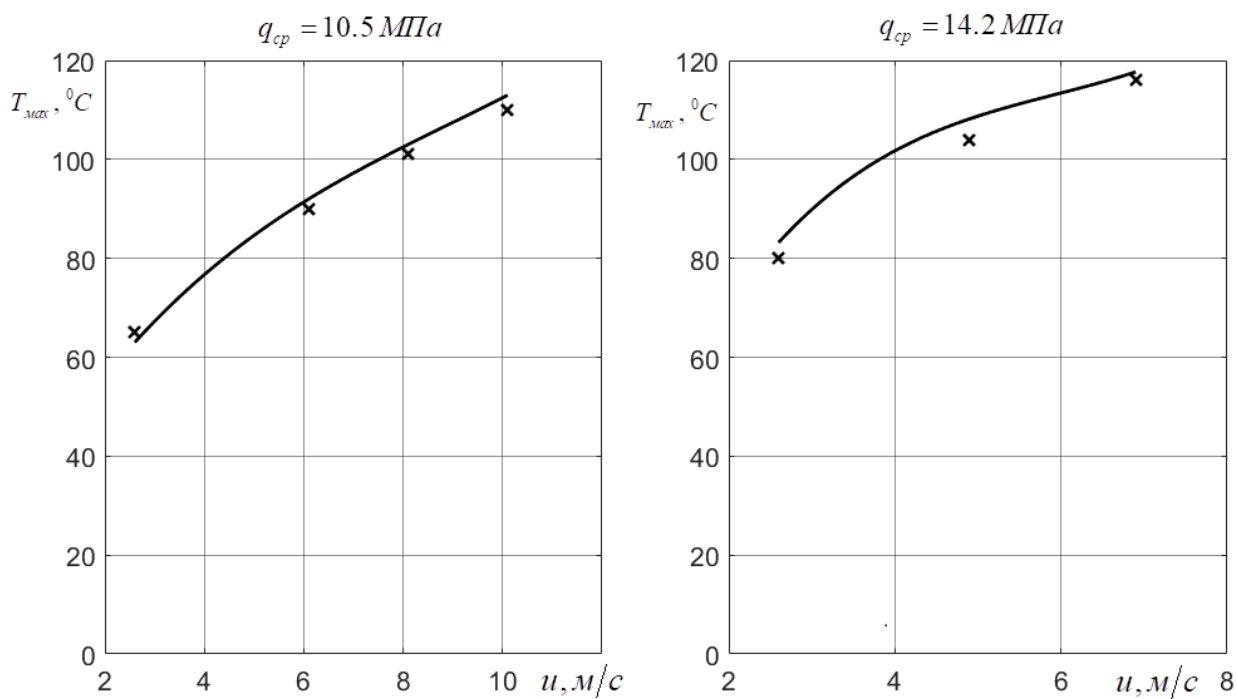


Рис. 5.4. Зависимость максимальной температуры от скорости скольжения. Смазочный материал П-28.

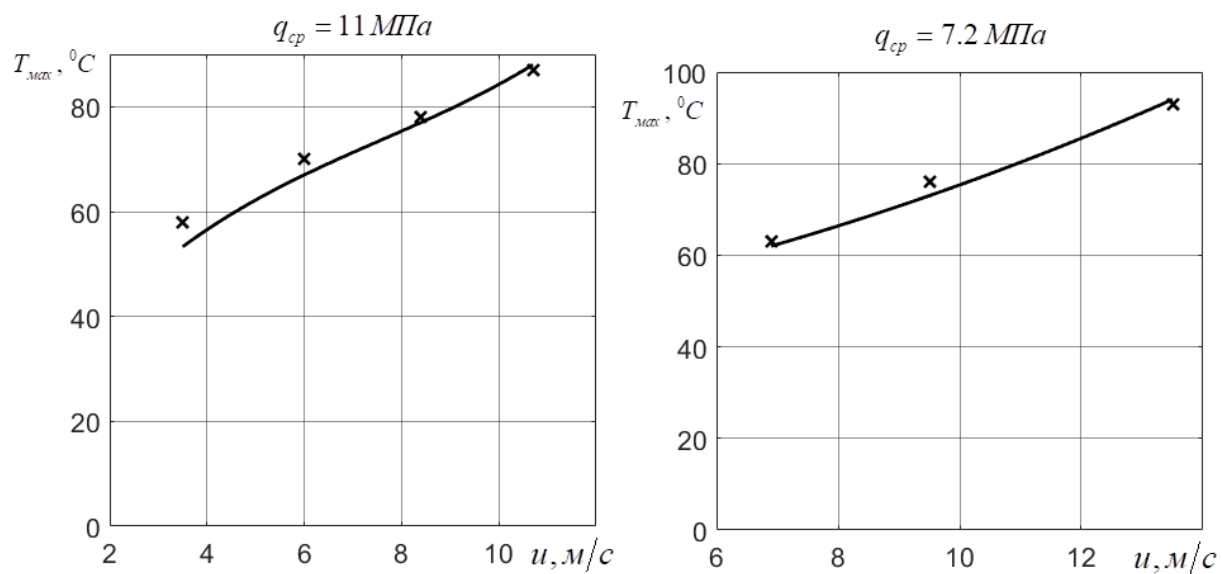


Рис. 5.5. Зависимость максимальной температуры от скорости скольжения. Смазочный материал Т-30.

Ниже приведено сопоставление результатов расчета по изложенной в первой главе методике с результатами опубликованных и экспериментальных данных.

На рис. 5.5 приведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными для подшипника с указанными параметрами. При этом теоретические результаты получены путем решения изотермической задачи.

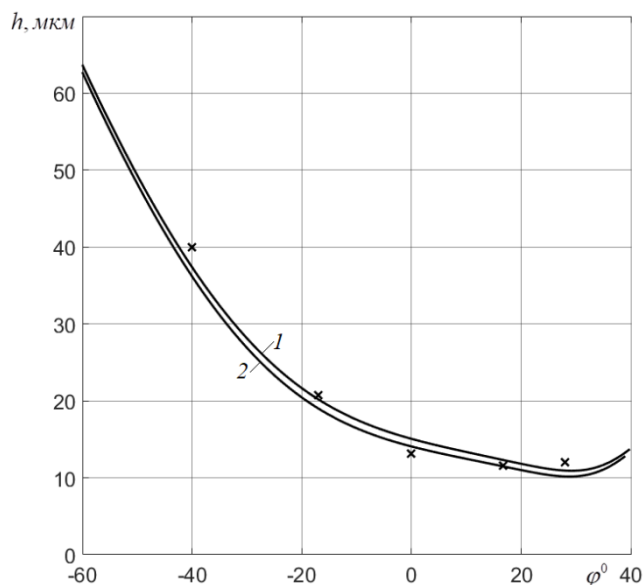


Рис. 5.5. Зависимости $h(\varphi)$ для подшипника с приведенными в примере 1 главы 1 параметрами. Кривые 1 и 2 – теоретические зависимости (1 – решение изотермической задачи, 2 – решение неизотермической задачи). Крестики – экспериментальные данные, приведенные в работе [50].

На рис. 5.5 к результатам, приведенным на рис.1.27 добавлено решение неизотермической задачи (кривая 2). Температура t_c определялась решением уравнения (1.104), т. е. расход смазочного материала вычислялся. Результаты расчетов, приведенные на рис. 5.5, свидетельствуют о том, что тепловыделение в смазочном слое в данном примере слабо влияет на толщину смазочного слоя. Оно также слабо влияет и на давление в смазочном слое.

На рис. 5.6 приведено сопоставление теоретических и экспериментальных данных по толщине смазочного слоя для подшипника с параметрами: $\vartheta = \frac{\pi}{3}$, $d = 0.18 \text{ м}$, $L = 0.135 \text{ м}$, $\psi = 0.001$, $u = 6.6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $W = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Н}$, масло T_{22} , $\mu_0 = 0.03 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $T_0 = 40^\circ \text{C}$, $m = 2$. Экспериментальные результаты

приведены в работе [50] (пунктирная кривая). Из приведенных результатов следует хорошее совпадение теории и эксперимента.

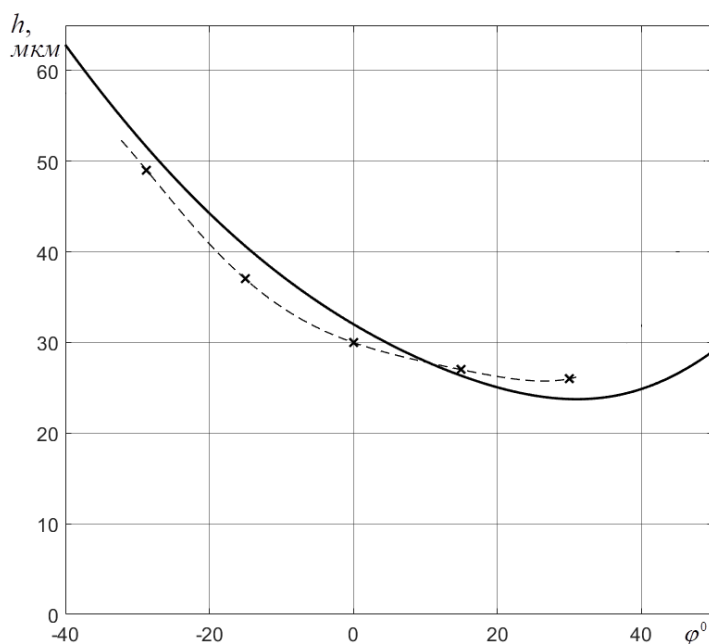


Рис. 5.6

В таблице 5.3 приведены результаты расчетов и результаты экспериментов, приведенных в монографии [47]. В эксперименте определялись минимальная толщина смазочного слоя, максимальная температура в смазочном слое, объемный расход смазки Q_m и средняя удельная нагрузка в подшипнике K ($K = W_L/dL$, d - диаметр шипа, L - осевая длина подшипника, W_L - полная нагрузка на подшипник). Эксперименты проводились на подшипниках с параметрами: угол охвата $2\theta = 2\pi/3$, диаметр $d = 0.18\text{ м}$, длина подшипника $L = 0.135\text{ м}$, относительный радиальный зазор $\psi = 0.004$ и $\psi = 0.0032$. Смазочный материал – масло T_{22} , вязкость $\mu_{40} = 0.03\text{ Па}\cdot\text{с}$, температурный коэффициент вязкости $m = 2$.

Таблица 5.3

Скорость м/с	5	5	5	5	10	10
$K, \text{ Мн/м}^2$	1.2	2.5	5	7.5	5	8

ψ	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
$Q_m, 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$	1.6	1.7	2.0	2.0	1.7	1.9
$h_{\min}, \text{ мкм}$ Эксперимент	24	12	8	5.5	10	6
$h_{\min}, \text{ мкм}$ Теория	27	13	7.1	5.2	8	5.8
$T_m, ^\circ\text{K}$ Эксперимент	321	328	336	343	344	350
$T_{\max}, ^\circ\text{K}$ Теория	317	325	332	340	350	352
Относительный Эксцентриситет λ	0.956	0.979	1.02	1.05	0.975	1.02

В таблице T_m - средняя температура масла в нагруженной зоне подшипника.

Приведенное сопоставление результатов расчета и экспериментальных данных показывает хорошее совпадение теории и эксперимента.

Выводы по главе 5

В пятой главе изложена методика экспериментальных исследований крупногабаритного подшипника скольжения с частичным углом охвата и приведены результаты экспериментальных исследований. Экспериментально определялась максимальная температура в смазочном слое. Проведено сопоставление результатов расчета и эксперимента. Сопоставление показало хорошее соответствие теории и эксперимента.

Проведено сопоставление теоретических и опубликованных экспериментальных результатов по минимальной толщине смазочного слоя, также показавшее хорошее совпадение теории и эксперимента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В научно-квалификационной работе решена научная проблема обеспечения несущей способности узлов жидкостного трения, имеющая важное хозяйственное значение, заключающееся в повышении качества проектирования изделий и снижении экономических затрат на ремонт путем моделирования гидродинамических процессов с учетом деформаций.

Основные выводы выполненного диссертационного исследования:

1. Разработана уточненная математическая модель расчета минимальной толщины смазочного слоя и максимальной температуры в радиальном подшипнике скольжения жидкостного трения конечной длины с частичным углом охвата с учетом деформаций разделенных смазочным слоем поверхностей и тепловых процессов, протекающих в подшипнике.
2. Предложен метод совместного численного решения уравнений контактных деформаций и движения смазочного слоя, расширяющий область применения упругогидродинамических расчетов по модели по сравнению с известными методами. Используя разработанный метод, проведено исследование влияния упругих деформаций в радиальных подшипниках с частичным углом охвата на несущую способность смазочного слоя. Установлено, что деформации повышают несущую способность. Уровень повышения зависит от минимальной толщины смазочного слоя и угла охвата подшипника и достигает десятикратного значения. При угле охвата $2\pi/3$ и при значении $H_{\min} = 0.1$ несущая способность повышается в два раза, а при $H_{\min} = 0.01$ более чем в 9 раз. В интервале значений $0.01 \leq H_{\min} \leq 0.35$ и при значениях коэффициента податливости $\alpha \leq H_{\min} (0.053 + 0.336H_{\min} + 34.4H_{\min}^2 - 193H_{\min}^3 + 458H_{\min}^4)$, а также при значениях $H_{\min} > 0.35$ расчеты следует выполнять без учета деформаций по гидродинамической (ГД) теории смазки.

3. Разработана методика расчета подшипников скольжения, позволяющая на стадии проектирования проводить расчеты опор валков прокатных станов в интервале средней удельной нагрузки от 1.2 МПа до 26 МПа и в широком интервале скоростей скольжения (до 30 м/с). Проведенные автором исследования серийного крупногабаритного тяжело нагруженного подшипника диаметром 550 мм, а также известные эксперименты показали удовлетворительную точность разработанной методики.
4. Предложен метод математического моделирования жидкостного режима трения в опорах валков реверсивных прокатных станов. Проведен анализ влияния деформаций на период реверсивного движения в жидкостном режиме. Установлено, что деформации повышают период, и уровень повышения зависит от коэффициента нагруженности, коэффициента податливости и отношения критического значения минимальной толщины смазочного слоя к радиальному зазору. При наиболее распространенных значениях этих параметров рост периода реверсивного движения варьируется от 1.04 до 29.7.
5. Для внешнего линейного контакта разработана инженерная методика расчета максимального давления в смазочном слое и минимальной толщины смазочного слоя в интервале изменения коэффициента жесткости от одного предельного значения, соответствующему контакту упругих тел при отсутствии смазочного слоя, до другого предельного значения, соответствующему гидродинамическому контакту. Определена область значений коэффициента жесткости, при которых максимум давления превышает давление по Герцу более чем в 1.6 раза, а также область значений, при которых максимальное давление близко к давлению по Герцу.
6. Исследовано влияние деформаций на высоту микронеровностей шероховатых поверхностей. Установлено, что деформации уменьшают высоту микронеровностей в области высокого давления. При высоких нагрузках понижение может быть более чем в два раза.

7. Разработана математическая модель процесса формирования смазочного слоя при движении из состояния покоя с учетом упругости смазочного материала. Проведенный численный анализ модели показал, что упругость смазки существенно повышает высоту фронта смазки, формируемого после начала движения. Разработанная математическая модель и метод ее численной реализации позволяют выбрать смазочный материал при проектировании узла трения, обеспечивающий наибольшую толщину смазочного слоя в моменты пуска.

8. Разработанная инженерная методика расчета радиальных подшипников скольжения использовалась в АО «Русполимет» для расчета тяжело нагруженных подшипниковых узлов валков кольцепрокатного оборудования. Годовой экономический эффект использования научно-технической разработки в условиях предприятия составил 2.3 миллиона рублей. Инженерная методика расчета параметров линейного упруго-гидродинамического контакта использовалась в Центре разработки перспективных решений АО «ПО «Муроммашзавод» с целью уточненной оценки параметров контакта зубьев прямозубых цилиндрических зубчатых передач изделий «Колесный редуктор 4319-2601010», «Планетарный редуктор АДФМ.123.00.000» на стадии проектирования. Ожидаемый годовой экономический эффект от внедрения научной и инженерной разработок составляет 1.3 млн. рублей.

Перспективы дальнейшей разработки темы. Изложенные решения УГД задач при реверсивном движении и решение УГД задачи о формировании смазочного слоя при движении из состояния покоя продемонстрировали высокую эффективность разработанного численного метода совместного решения уравнений контактных деформаций и уравнений движения смазочного слоя при решении нестационарных задач теории смазки деформируемых тел.

Данный метод может быть использован при решении следующих важных для практики задач:

- разработка программы расчета гидродинамических подшипников скольжения двигателей внутреннего сгорания с учетом деформаций поверхностей трения;
- исследование влияния деформаций трущихся поверхностей на динамические характеристики радиальных и упорных подшипников скольжения жидкостного трения;

Работа выполнялась при поддержке грантов:

1. РФФИ, грант 06-08-01162. Направление исследования: «Теоретическое исследование контакта вязкоупругого слоя композиционного материала и жесткого цилиндра при наличии сил трения в области контакта изнашиваемых поверхностей».

2. В рамках ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2014–2020 г.” Проект RFMEFI57815X0108.

Направления исследований:

- «Проведение оценки диапазона рациональных значений ряда параметров шероховатости внутренней поверхности опоры скольжения по результатам решения математической модели, описывающей режим ЭГС»;

- «Разработка математической модели контактного взаимодействия упругой поверхности с рациональной геометрией шероховатостей с композитом в режиме упругогидродинамического и смешанного трения при переменной относительной скорости движения».

3. РФФИ, гранты: 11_01_00650; 09-08-01229; 09-08-01236а. Направление исследований: Вязко – упруго - гидродинамический линейный контакт при наличии шероховатости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Албагачиев, А.Ю. Неизотермическая упругогидродинамическая задача для радиального подшипника скольжения / А.Ю. Албагачиев, **П. П. Усов** // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2023. - №4. – С. 12-19.
2. **Ахвердиев, К.С.** Деформация поверхности скольжения подушек упорных подшипников и ее влияние на распределение давления в масляном слое, обладающем вязкоупругими свойствами / К.С. Ахвердиев, И.А. Журба, В.М. Яковлев // Вестник РГУПС. – 2004. – № 1. – С. 5–10.
3. **Ахвердиев, К.С.** Математическая модель вязкопластичной смазки подшипников скольжения с деформируемой опорной поверхностью / К.С. Ахвердиев, И.В. Колесников, М.А. Мукутадзе, И.С. Семенко // Вестник ДГТУ. – 2012. – Т.69. – № 8. – С. 18–22.
4. **Белл, И.Ц.** Реологическое поведение смазки в контактной зоне системы с контактом качения / И.Ц.Белл, И.В. Кеннел, С.М. Аллен // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия D. М.: Мир – 1964. – № 3. – С. 10–25.
5. **Белл, И.Ц.** Интерпретация данных о толщине масляной пленки при качении / И.Ц. Белл, И.В. Кеннел // Проблемы трения и смазки. М.: Мир – 1971. – № 4. – С. 45–59.
6. **Беспорточный А. И.** Режимы смазки контакта цилиндра с упругим покрытием и жесткого полупространства / А.И. Беспорточный // Научный вестник МГТУ ГА. –2011. – № 163 (1). – С. 138–143.
7. **Беспорточный А.И.** Асимптотические режимы гидродинамического контакта жестких цилиндров, покрытых тонкими упругими слоями / А.И. Беспорточный // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3. – № 1. – С. 28 - 34.
8. **Беспорточный, А.И.,** Галахов М.А. Математическое моделирование в триботехнике / А.И. Беспорточный, М.А. Галахов // Учебное пособие. М.: МФТИ. – 1991. – 88с.

9. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
10. **Власов, В.З.** Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
11. **Галахов М. А.** К вопросу о существовании второго максимума давления в слое смазки / М.А. Галахов // Машиноведение. – 1973. – № 5. – С. 80-82.
12. **Галахов М.А.,** Гусятников П. Б., Новиков А.П. Математические модели контактной гидродинамики / М.А. Галахов, П.Б. Гусятников, А.П. Новиков. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
13. Галахов М.А., Методы расчета подшипников скольжения / М.А. Галахов, Е.Д. Терентьев, **П.П. Усов.** – М.: ВЦ АН СССР, 1984. – 56 с.
14. Галахов М.А., Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения / М.А. Галахов, **П.П. Усов.** – М.: Наука, 1990. – 278 с.
15. Галахов М. А., О расчете износа и толщины смазочного слоя в подшипниках скольжения с тонким вкладышем / М.А. Галахов, **П.П. Усов** // Трение и износ. – 1984. – Т. 5. – № 2. – С. 239-250.
16. Галахов М. А., Математические модели теории трения, смазки и износа / М.А. Галахов, **П.П. Усов** // В сб.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. – М.: Наука, 1986. – С. 183-222.
17. **Галин Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
18. **Горячева И. Г.** Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по основанию из того же материала / И.Г. Горячева // Прикладная математика и механика. – 1973. – Т. 37. – № 5. – С. 877-885.
19. **Горячева И. Г.** Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
20. Горячева, И.Г. Численный анализ вязкоупругогидродинамического линейного контакта при наличии шероховатости / И.Г. Горячева, **П.П. Усов** // В сб.: Механика и физика процессов на поверхности и в контакте твердых

тел, деталей технологического и энергетического оборудования. – Тверь: Изд-во ТГТУ, 2011. – Выпуск 4. – С. 5-9

21. Горячева, И.Г. Численный анализ контакта вязкоупругих шероховатых тел при наличии слоя вязкой смазки / И.Г. Горячева, **П.П. Усов** // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76. – Вып. 5. – С. 766–778.

22. Горячева, И.Г. Численный анализ вязкоупругогидродинамического точечного контакта при стационарных условиях / И.Г. Горячева, **П.П. Усов** // Трение и износ. – 2010. – Том 31. – № 1. – С. 13-23

23. **Грубин А.Н.** Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей / А.Н. Грубин // Труды ЦНИИТМАШ. – 1949. – вып. 30. – С. 126-184.

24. **Данилов, В.Д.** Численный анализ влияния эксплуатационных параметров на характеристики водной смазки модельного подшипника скольжения / В.Д. Данилов, **П.П. Усов**, Г.М. Шитов // Вестник научно-технического развития. – 2018. – № 12(136). – С. 3-14

25. Данилов, В.Д. Исследование режимов трения упругих шероховатых поверхностей с позиций эластогидродинамической теории смазки / В.Д. Данилов, **П.П. Усов**, Г.М. Шитов // В сб.: Трибология машиностроению. – М.: ИМАШ РАН, 2018. – С. 159-163

26. Данилов, В. Д. Численный анализ влияния шероховатости на характеристики смазочного слоя в контакте упругих шероховатых поверхностей / В.Д. Данилов, **П.П. Усов**, Н.Н. Рева, Л.К.Олифиров // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2019. – № 2. – С. 68-77

27. **Даусон, Д.** Смазка легконагруженных цилиндров при комбинированном качении, скольжении и нормальном движении. Часть I. Теория передач / Д. Даусон, П. Маркоу, Д. Джонс // Проблемы трения и смазки. – М.: Мир. – 1976. – № 4. – С. 28-34.

28. **Жуковский, Н.Е.** О трении смазочного слоя между шипом и подшипником / Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин. Полн. собр. соч. – М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – Т. 4. – С. 279-298.

29. **Задорожный А.И.** Регуляризованная асимптотика для уравнения Рейнольдса в винклеровском приближении / А.И. Задорожный // Труды Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». Часть 1. Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. – Самара.: СамГТУ, – 2004. – С. 79-84.
30. **Калошкин, С. Д.** Эксплуатационные характеристики подшипниковых опор на полимерных композиционных материалах с позиции контактно гидродинамической теории смазки / С.Д. Калошкин, П.П. Усов, Г.М. Шитов, В.Д. Данилов // В сб.: Научные труды VI Международной научной конференции «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении». – М.: ИМАШ РАН, – 2019. – С. 202-204.
31. **Капица П.Л.** Гидродинамическая теория смазки при качении / П.Л. Капица // ЖТФ. – 1955. – Т. 25. – вып. 4. – С. 747-762.
32. **Клованич С.Ф.** Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С.Ф. Клованич. – Запорожье, 2009. – 394 с.
33. **Коднир Д.С.** Контактно - гидродинамическая теория смазки / Д.С. Коднир. – Куйбышев: Куйбышевское книжное изд - во, 1963. – 183 с.
34. **Коднир Д. С.** Контактная гидродинамика смазки деталей машин / Д.С. Коднир. – М.: Машиностроение, 1976. – 304 с.
35. **Коднир, Д.С.** Эластогидродинамический расчет деталей машин / Д.С. Коднир, Е.П. Жильников, Ю.И. Байбородов. – М.: Машиностроение, 1988. – 160 с.
36. **Коднир, Д. С.** Теоретическое определение верхнего предельного напряжения сдвига в смазочном слое при качении со скольжением / Д.С. Коднир, Л.Л. Саввин // В сб.: докладов Всесоюзного совещания по контактной задаче. – М.: Изд. НИИ машиностроения. – 1969. – С. 357–368.
37. **Конвей Х. Д., Энджел П. А.** Упругогидродинамическая смазка тонкой пленки между двумя цилиндрами / Х.Д. Конвей, П.А. Энджел // Проблемы трения и смазки. М.: Мир, 1973, № 3. – С. 120-129.

38. **Коровчинский М.В.** Теоретические основы работы подшипников скольжения / М.В. Коровчинский. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы. 1959. – 404 с.
39. Коровчинский М.В., Плоская задача гидродинамической теории смазки при деформируемости поверхностей, ограничивающих смазочный слой / М.В. Коровчинский, **П.П. Усов** // Трение и износ. – 1981. – Т. 2. – № 3. – С. 393-404.
40. **Кудиш И.И.** Асимптотический анализ плоской неизотермической упругогидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения / И.И. Кудиш // Известия АН Арм. ССР: Механика. – 1978. – Т. 31. – № 1. – С. 65-78.
41. **Ли, К. М.** Распределения давления и деформации, при сближении по общей нормали двух цилиндров, разделенных пленкой смазки / К.М. Ли, Х.С. Ченг // Проблемы трения и смазки. – 1973. – № 3. – С. 49-57.
42. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 709 с.
43. **Петров Н.П.** Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости / Н.П. Петров. – СПб.: Тип. А.С. Суворина, 1883. – 212 с.
44. **Петров Н.П.** Гидродинамическая теория смазки. Избранные работы / Н.П. Петров. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 558 с.
45. **Петрусевич А.И.** Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки / А.И. Петрусевич // Изв. АН СССР. ОТН. – 1951. – № 2. – С. 209-224.
46. **Пулькин С.П.** К вопросу о существовании второй пики давления в смазочном слое / С.П. Пулькин // ДАН. – 1965. – Т.164. – № 4. – С. 761-763.
47. **Снеговский Ф. П.** Опоры скольжения тяжелых машин / Ф.П. Снеговский. – М.: Машиностроение, 1969. – 224 с.
48. **Тимошенко, С. П.** Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 576 с.

49. **Тодер, И.А.** Гидродинамические опоры прокатных станов / И.А. Тодер, Н.А. Кудрявцев, А.А. Рязанов, М.Д. Иванов. – М.: Изд-во «Металлургия», 1968. – 300с.

50. **Тодер, И.А.** Крупногабаритные гидростатодинамические подшипники / И.А. Тодер, Г.И. Тарабаев. – М: Машиностроение, 1976. – 200 с.

51. **Усов П.П.** Численное решение одной упругогидродинамической задачи теории смазки цилиндрических тел конечной длины / П.П. Усов // Трение и износ. – 1990. – Т. 11. – № 4. – С. 630-638.

52. **Усов П.П.** Численный анализ переходных процессов в УГД – контакте цилиндров при изменении направления скорости качения / П.П. Усов // Трение и износ. – 2006. – Том 27. – № 1. – С. 43-53.

53. **Усов П.П.** О точности численного решения УГД задач / П.П. Усов // Трение и износ. – 2006. – Том 27. – № 4. – С. 394-402.

54. **Усов П.П.** Численный анализ процесса формирования упругогидродинамического смазочного слоя в контакте цилиндров при движении из состояния покоя / П.П. Усов // Трение и износ. – 2008. – Т. 29. – № 1. – С. 69-83.

55. **Усов П.П.** Анализ переходных процессов в линейном упругогидродинамическом контакте при реверсивном движении / П.П. Усов // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2012. – №12. – С. 39-47.

56. **Усов П.П.** Численный анализ влияния вязкоупругости поверхностных слоев контактирующих тел на характеристики смазочного слоя / П.П. Усов // В сб. докладов Международной научной конференции «Механика и трибология транспортных систем». – Ростов-на-Дону, – 2016. – Том 2. – С. 75-81.

57. **Усов П.П.** Численный анализ характеристик вязкого смазочного слоя между поверхностями вязкоупругих тел / П.П. Усов // В книге: Трибология Машиностроению. Труды XI международной научно-технической конференции. – М.: ИМАШ РАН, – 2016. С. – 245-246.

58. **Усов П.П.** Основные свойства решений одной задачи теории смазки деформируемых тел / П.П. Усов // В книге: Трибология Машиностроению. Труды XI международной научно-технической конференции. – М.: ИМАШ РАН, – 2016. – С. 243-245.
59. **Усов П.П.** Упруго-гидродинамическая задача для опорного подшипника скольжения при реверсивном движении / П.П. Усов // Трение и износ. – 2016. – Том. 37. – №3. – С. 269-279.
60. **Усов П.П.** Влияние вязкоупругих свойств контактирующих тел со смазыванием на их контактное взаимодействие / П.П. Усов // Вестник машиностроения. – 2017. – № 4. – С. 50-56.
61. **Усов П.П.** Численный анализ характеристик слоя вязкой смазки в опорном подшипнике скольжения при реверсивном движении / П.П. Усов // В книге: Полимерные композиты и трибология (ПОЛИКОМТРИБ-2017). Тезисы докладов международной научно-технической конференции (27-30июня 2017 г.). – Беларусь. Гомель. – С. 56.
62. **Усов П.П.** Численный анализ характеристик слоя смазки в опорном подшипнике скольжения при реверсивном движении / П.П. Усов // Прикладная математика и механика. – 2018. – Том 82. – Вып. 3. – С. 290-299.
63. **Усов П.П.** Контактные задачи для упругого слоя / П.П. Усов // В сборнике: Трибология машиностроению. Труды XII международной научно-технической конференции. – М.: ИМАШ РАН, 2018. – С. 517-520.
64. **Усов П.П.** Контактная задача качения вязкоупругого цилиндра по вязкоупругому основанию при наличии слоя вязкой смазки контакта / П.П. Усов // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83. – № 1. – С. 47-62.
65. **Усов П.П.** Задача о контакте вязкоупругих тел при наличии слоя вязкой смазки / П.П. Усов // : Трибология-машиностроению. Труды XIII Международной научно-технической конференции. – М.: ИМАШ РАН, 2020. – С. 301-305.
66. **Усов П.П.** Численный анализ переходных процессов в вязкоупругогидродинамическом контакте при реверсивном движении / П.П.

Усов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2021. – № 2. – С. 81-90.

67. **Усов, П.П.** Контактная задача для упругого слоя и жесткого цилиндра при наличии сил трения / П.П. Усов, В.Д. Данилов // Трение и износ. – 2007. – Том 28. – № 3. – С. 225-237.

68. **Усов, П.П.** Контактная задача для вязкоупругого слоя и жесткого цилиндра при равномерном скольжении / П.П. Усов, В.Д. Данилов // Трение и износ. – 2009. – Том 30. – № 4. – С. 341-354.

69. **Усов П.П.** Плоская неизотермическая задача теории смазки подшипников скольжения при деформируемости поверхностей, ограничивающих смазочный слой / П.П. Усов, И.А. Тодер, Е.С. Кренделев // Трение и износ. – 1982. – Т. 3. – № 1. – С. 64-75.

70. **Усов П.П.** Математическое моделирование опор жидкостного трения / П.П. Усов, И.А. Тодер, Е.С. Кренделев // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1980. № 5. С. 81-88.

71. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2 / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 608 с.

72. **Ченг Х.С.** Численное решение для давления, температуры и толщины смазочной пленки между двумя бесконечно длинными катящимися и скользящими цилиндрами при больших нагрузках / Ч.С. Ченг, Б. Штернлихт // Труды Американского общества инженеров-механиков. Теоретические основы инженерных расчётов. – 1965,. – № 3. – С. 180 – 194.

73. **Эртель А.М.** Гидродинамический расчет смазки контакта кривых поверхностей / А.М. Эртель. – М.: Изд. ЦНИИТМАШ, 1945. – С. 1 – 64.

74. **Abdallah A. Elsharkway.** Visco-elastohydrodynamic lubrication of line contact / Abdallah A. Elsharkway // Wear. – 1996. – V. 199 . – P. 45-53.

75. **Amuzuga, K.V.** Fully coupled resolution of heterogeneous elastic-plastic contact problem / K.V. Amuzuga, T. Chaise, A. Duval // Journal of Tribology. – 2016. – 138 (2). P. 1 – 42.

76. **Angra, S.** Effects of elastic deformation of bearing liner on performance of finite offset-halves pressure dam bearings / S. Angra, N.P. Mehta, S.S. Rattan // Tribology Letters. – 1996. – 2. – P. 273–285.
77. **Barus C.** Isothermals, Isopiestic and Isometrics Relative to Viscosity / C. Barus // American Journal of Science. – 1893. – vol. 45, P. 87-96.
78. **Bell I.C.** Lubrication of Rolling Surfaces by a Ree - Eyring Fluid / I.C. Bell // ASLE Transactions. – 1962, – Vol. 5(1). – P. 160-171.
79. **Bendaoud, N.** An experimental and numerical investigation in elastohydrodynamic behaviour of a plain cylindrical journal bearing heavily loaded / N. Bendaoud, K. Mehala, A. Youcefi, M. Fillon // Proceedings of the Institutions of Mechanical Engineers part J, journal of Engineering Tribology. – 2012. – 226, – P. 809–818.
80. **Bouyer, J.;** Fillon, M. On the Significance of Thermal and Deformation Effects on a Plain Journal Bearing Subjected to Severe Operating Condition / J. Bouyer, M. Fillon // Journal of Tribology. – 2004. – 126. – P. 819–822.
81. **Chang L.** A Simple and Accurate Method to Calculate Transient EHL Film Thickness in Machine Components Undergoing Operation Cycles / L.A. Chang // Tribology Transactions. – 2000. – V. 43(1). – P. 116-122.
82. **Cheng J.** Elastohydrodynamic Grease Lubrication Theory and Numerical Solution in Line Contacts / J. Cheng // Tribology Transactions. – 1994. – V.4. – P. 711-718.
83. **Conry T.F.** Reynolds-Eyring Equation for Elastohydrodynamic Lubrication in Line Contacts / T.F. Conry, S. Wang, C.A. Cusano // Transaction of the ASME. – 1987. – Vol.109. – P. 648-654.
84. **Dowson D.** A Generalized Reynolds Equation for Fluid Film Lubrication / D. Dowson // International Journal of Mechanical Science. – 1962. – vol. 4, – P. 159-170.
85. **Dowson D.** A Numerical Procedure for the Solution of the EHD Problem on Rolling and Sliding Contacts Lubricated by a Newtonian Fluid / D. Dowson // Proceedings of the Institutions of Mechanical Engineers. – 1965-66. – Vol. 180. –

Pt 3B. – P. 57–71.

86. **Dowson, D.** A numerical solution to the elasto-hydrodynamic problem / D. Dowson, G. R. Higginson // Journal Mechanical Engineering Science. – 1959. – Vol.1. – No 1. – P. 6-15

87. **Dowson, D.** Elastohydrodynamic Lubrication / D. Dowson, G. R. Higginson. – London: Pergamon Press, 1965. – 66 P.

88. **Dowson, D.** Elastohydrodynamic Lubrication. The Fundamentals of Roller and Gear Lubrication / D. Dowson, G. R. Higginson. — Oxford: Pergamon Press. — 1966. - 235 P.

89. **Dowson, D.** The Isothermal Lubrication of cylinders / D. Dowson, A.V. Whitaker // ASLE Transactions. – 1965. – v. 8. – P. 224–234.

90. **Dowson, D.** A numerical procedure for the solution of the elastohydrodynamic problem of rolling and sliding contacts lubricated by Newtonian fluid / D. Dowson, A.V. Whitaker // Proceedings of the Institutions of Mechanical Engineers. – 1965. – Vol. 180. – Pt 3B. – P. 57-71.

91. **Dwyer-Joyce, R.S.** Operating Limits for Acoustic Measurement of Rolling Bearing Oil Film Thickness / R.S. Dwyer-Joyce, T. Reddyhoff, B.W. Drinkwater // Tribology Transactions, 2004. Vol. 47. P. 366-375

92. **Evans, H. P.** Evaluation of Deflexion in SemiInfinite Bodies by a Differential Method / H.P. Evans, T.G. Hughes. // Proceedings of the Institution Mechanical Engineers. Part C. – 2000. – V. 214. – P. 563-584.

93. **Evans, H. P.** Inverse Solution of Reynolds Equation of Lubrication under Point Contact Elastohydrodynamic Conditions / Evans H. P., Snidle R. W. // Journal of Tribology. – 1981. – 103(4). – P. 539-546.

94. **Evans, H. P.** The Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts at Heavy Loads / Evans H. P., Snidle R. W. // Proceedings of the Royal Society. – 1982. – V. 382. – P. 183-199.

95. **Fairlie, R.** Numerical modeling of thermal effects in elastohydrodynamic lubrication solvers / R. Fairlie, C.E. Goodyer, M. Berzins, L.E. Scales //

Proceedings of the 29th Leeds-Lyon Symposium on Tribology. – 2003. – P. 675-683.

96. **Gecim, B.** A Film Thickness Analysis for Line Contacts under Pure Rolling Conditions with a Non-Newtonian Rheological Model / Gecim B., Winer W. O. // ASME Transactions, Journal of Lubrication Technology, 1981, 103, pp 305-316

97. **Glovnea, R.P.** Behavior of EHD Films during Reversal of Entrainment in Cyclically Accelerated Decelerated Motion / R.P. Glovnea, H.A. Spikes // Tribology Transactions. 2002. – V. 45(2). – P. 177-184.

98. **Glovnea, R.P.** The Influence of Lubricant upon EHD Film Behavior during Sudden Halting of Motion / R.P. Glovnea, H.A. Spikes // Tribology Transactions. –2000. – V. 43(4). – P. 731-739.

99. **Glovnea, R.P.** Elastohydrodynamic film formation at the start-Up of the motion / Glovnea R.P., Spikes H. A. // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. – 2001. V. 215 (2). P. 125-138.

100. **Glovnea, R.P.** Elastohydrodynamic Film Collapse during Rapid Deceleration. Part II—Theoretical Analysis and Comparison of Theory and Experiment / R.P. Glovnea, H.A. Spikes // Transaction of the ASME. Journal of Tribology. – 2001. – V. 123(2). – P. 262-267.

101. **Goryacheva, I.G.** Contact characteristics of rolling/sliding cylinder and a viscoelastic layer bonded to an elastic substrate /I.G. Goryacheva, F. Sadeghi // Wear. –1995. – V. 184. – P. 125–132.

102. **Goryacheva, I.G.** Contact of elastic bodies with thin viscoelastic coatings under conditions of rolling or sliding friction / I.G. Goryacheva, A.P. Goryachev, F. Sadegi // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. –1995. – V. 59 (4). – P. 607–614.

103. **Goryacheva, I.G.** Viscoelastic effects in lubricated contacts / Goryacheva I.G., Sadeghi F., Xu G. // Wear. – 1996. – V. 198. - P. 307–312.

104. Goryacheva, I.G. A numerical analysis of the contact of rough viscoelastic bodies in the presence of a layer of viscous lubricant / I.G. Goryacheva, **P.P. Usov** // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. V. –76. – P. 572–581.
105. **Greenwood J.A.** An extension of the Grubin theory of elastohydrodynamic lubrication / J.A. Greenwood // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1972. – Vol. 5. – P. 2195-2211.
106. **Habchi, W.** Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts Using a Newtonian/Generalized Newtonian Lubrication / W. Habchi, D. Eyheramendy, S. Bair, P. Vergne, G.E. MoralesEspejel // Tribology Letters. – 2008. – Vol. 30. – P. 41-52.
107. **Hamrock, B.J.** Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part I, Theoretical Formulation / B.J. Hamrock, D. Dowson // Journal of Tribology. – 1976. – Vol. 98. – P. 223-229.
108. **Hamrock, B.J.** Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part II—Ellipticity Parameter Results / B.J. Hamrock, D. Dowson // Journal of Tribology. – 1976. – Vol. 98(3). – P. 375-383.
109. **Hamrock, B.J.** Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part III—Fully Flooded Results / B.J. Hamrock, D. Dowson // Journal of Tribology. – 1977. – Vol. 99(2). – P. 264-276.
110. **Higginson G.R.** The Theoretical Effects of Elastic Deformation of the Bearing Liner on Journal Bearings Performance / G.R. Higginson // Proceedings of the Symposium on Elastohydrodynamic Lubrication; Institution of Mechanical Engineers: Westminster, UK. – 1965. – Vol. 180. – P. 31–38.
111. **Holmes, M.J.A.** Comparison of transient EHL calculations with a start up experiment / M.J.A. Holmes, H.P. Evans, R.W. Snidle // Proceedings of the 29th Leeds-Lyon symposium on tribology.: Leeds. – 2002. – P. 79–89.
112. **Holmes, M.J.A.** Transient Elastohydrodynamic Point Contact Analysis Using a New Coupled Differential Deflection Method Part 1: Theory and Validation / M.J.A. Holmes, H.P. Evans, T.G. Hughes, R.W. Snidle // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part J. – 2003. – Vol. 217. – P. 289-303.

113. **Holmes, M.J.A.** Transient Elastohydrodynamic Point Contact Analysis Using a New Coupled Differential Deflection Method Part 2: Results / M.J.A. Holmes, H.P. Evans, T.G. Hughes, R.W. Snidle // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part J. – 2003. – Vol. 217. – P. 305-321.
114. **Hooke, C.J.** Elastohydrodynamic lubrication of soft viscoelastic materials in line contact / C.J. Hooke, P. Huang // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. – 1997. – Vol. 211. – P. 185-194.
115. **Hunter S.C.** The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half Space / Hunter S.C. // Transactions of the ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics. – 1961. – Vol. 28. – P. 611–617.
116. **Izumi, N.** Observation and Numerical Simulation of Oil-Film Formation under Reciprocating Rolling Point Contact / N. Izumi, S. Tanaka, K. Ichimaru, T. Morita // Proceedings of the 30th Leeds-Lyon Symposium «Transient Process in Tribology». 2003. – Vol. 43. – P. 565-572.
117. **Jin, Z.M.** Transient elastohydrodynamic analysis of elliptical contacts. Part 1: isothermal and Newtonian lubricant solution / Z.M. Jin, P. Yang, J. Cui, D. Dowson // Proceedings of the I MECH E Part J. Journal of Engineering Tribology. – 2004(218), N 3. – P. 211-224.
118. **Johnson, K.L.** Shear behavior of Elastohydrodynamic oil films / K.L. Johnson, J.L. Tevaarwerk // Proceedings of the Royal Society. Series A, Mathematical and Physical Science. – 1977. – Vol. 356. – N 1685. – P. 215–236.
119. **Kim, H.J.** Thermal Elastohydrodynamic Analysis of Circular Contacts. Part 2: NonNewtonian Model / H.J. Kim, P. Ehret, D. Dowson, C.M. Taylor // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part J. – 2001. – Vol. 215. – P. 353-362.
120. **Kudish I.I.** Lubrication for Line and Point Contacts. Asymptotic and Numerical Approaches / I.I. Kudish. – Boca Ration.: CRC Press. – 2013.
121. **Kudish I.I.** Revision of a Fundamental Assumption in the Elastohydrodynamic Lubrication Theory and Friction in Heavily Loaded Line

Contacts With Notable Sliding // Journal of Tribolog. – 2016. – Vol. 138 (1). – P. 011501-1 – 011501-14.

122. **Kudish, I.I.** Some Criteria for Coating Effectiveness in Heavily Loaded Line Elastohydrodynamically Lubricated Contacts—Part II: Lubricated Contacts / I.I. Kudish, S.S. Volkov, A.S. Vasiliev, S.M. Aizikovich // Journal of Tribology. – 2015. – Vol. 138 (2). – P. 021504-1 – 021504-10.

123. **Kudish, I.I.** Effectiveness of Coatings With Constant, Linearly, and Exponentially Varying Elastic Parameters in Heavily Loaded Line Elastohydrodynamically Lubricated Contacts / I.I. Kudish, S.S. Volkov, A.S. Vasiliev, S.M. Aizikovich // Journal of Tribology. – 2017. Vol. – 139 (2). – P. 021502-1– 021502-15.

124. **Kudish I.I.** Heavily loaded line EHL contacts with thin adsorbed soft layers / I.I. Kudish, E. Pashkovski, S.S. Volkov, A.S. Vasiliev, S.M. Aizikovich // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2020. – Vol.25. – issue 4. – P.1011-1037.

125. **Kushwara, M.** Transient concentrated finite line roller-to-race contact under combined entraining, tilting and squeeze film motions / M. Kushwara, H. Rahnejat // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2004(37). – N 14. – P. 2018-2034.

126. **Lahmar, M.** Elastohydrodynamic analysis of one-layered journal bearings / M. Lahmar, A. Haddad, D. Nicolas // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology – 1998. – Vol. 212. – P. 193–205.

127. **Liu, X.** Non-Newtonian Thermal Analyses of Point EHL Contacts Using and Eyring Model / X. Liu, M. Jiang, P. Yang, M. Kaneta // Transactions of the ASME, Journal of Tribology. – 2005. – Vol. 127. – P. 70-81.

128. **Lugt P. M.** and Morales-Espejel G.E. A Review of Elasto-Hydrodynamic Lubrication Theory // Tribology Transactions. – 2011. – Vol. 54. – P. 470-496.

129. **Martin, H.M.** Lubrication of Gear Teeth / H.M. Martin // Engineering. – 1916. – Vol. 102. – P. 119-121.

130. **Lee, R.T.** Inverse approach for calculating pressure and viscosity in elastohydrodynamic lubrication of line contacts / R.T. Lee , H.M. Chu, Y.C. Chiou // Tribology International. – 2002. – Vol. 35. – P. 809–817.
131. **Morales-Espejel, G.E.** Ertel–Grubin methods in elastohydrodynamic lubrication – a review /G.E. Morales-Espejel, A.W. Wemekamp // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. –2008. – Vol. 222. – Issue 1. – P. 15-34.
132. **Nelias, D.** Simplified Model to Study EHL Film Collapse during Rapid Halting Motion / D. Nelias, A.A. Trujillo Jimenez // Tribology Transactions. – 2002. – Vol. 45(4). – P. 512-520.
133. **Nikas G.K.** Transient elastohydrodynamic lubrication of rectangular elastomeric seals for linear hydraulic actuators / G.K. Nikas // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. – 2003. – Vol. 217. – N 6. –P. 461-473.
134. **Ohno, N.** Effect of high-pressure rheology of lubricants upon entrapped oil film behaviour at halting elastohydrodynamic lubrication / N. Ohno, S. Yamada// Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. – 2007. – V. 221(3). – P. 279-285.
135. **Okamura H.A.** Contribution to the Numerical Analysis of Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication / H.A. Okamura // Tribology of Reciprocating Engines, Proceedings of the 9th Leeds-Lyon Symposium on Tribology. – 1982. – P. 313-320.
136. **Osborn, K.F.** Time Dependent Line EHD Lubrication Using Multigrid/Multilevel Technique / Osborn K.F., Sadeghi F. // Transactions of the ASM, Journal of Tribology. – 1992. – Vol. 114. – P. 68–74.
137. **Pandey, A.** Lubrication of soft viscoelastic solids / A. Pandey, S. Karpitschka¹, C.H. Venner, J.H. Snoeijer // Journal of Fluid Mechanics. – 2016. – V. 799. – P. 433-447.
138. **Rong-Tsong Lee**, Inverse approach for estimating pressure and viscosity in the elastohydrodynamic lubrication of circular contacts / Rong-Tsong Lee, Hsiao-

- Ming Chu, Yuang-Cherng Chiou // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. – 2013. – Vol. 217. – P. 277 - 288.
139. **Scaraggi, M.** Theory of viscoelastic lubrication / M. Scaraggi, B.N.J. Persson // Tribology International. – 2014. – V. 72. P. 118-130.
140. **Silbey I.B.** Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Rolling-Contact Surfaces / I.B. Silbey, F.K. Orcutt // ASLE Transactions. – 1961. – V. 4. – P. 234-249.
141. **Usov P.P.** EHD Effects in Lubricated Journal Bearing / P.P. Usov // Lubricants. – 2018. – 6. – 12. – P. 1-16.
142. **Usov P.P.** Numerical Analysis of Lubrication Layer Characteristics in a Supporting Slider Bearing under Reverse Motion / P.P. Usov // Fluid Dynamics. – 2018. – Vol.53. – Suppl. 1. – P. S14-S23.
143. **Usov P.P.** Effects of lubricant viscoelasticity on film thickness in elastohydrodynamic line contacts during start-up / P.P. Usov // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. – 2018. – Vol. 230(7). – P. 769–782.
144. **Usov, P.P.** Effect of surface roughness in visco-elastohydrodynamic line contact / Usov P.P, Goryacheva I.G. // in Book: Topical problems in solid and fluidmechanics. – New Delhi, INDIA.: Elite Publishing House Pvt Ltd, 2011. – P. 53-65
145. **Usov, P.P.** Effect of surface toughness in visco-elastohydrodynamic line contact / P.P. Usov, I.G. Goryacheva // Advanced Problems in Mechanics: XXXIX Summer School - Conference . – St.Petersburg (Repino).: APM –2011. – P.95-96.
146. **Venner, C.H.** Advanced Multilevel Solution of the EHL Line Contact Problem / C.H. Venner, W.E. Napel, Ft. FBosma // Transactions of the ASME. – 1990. – Vol. 112. – P. 426-432.
147. **Venner, C.H.** Multigrid techniques: a fast and efficient method for the numerical simulation of the elastohydrodynamically lubricated point contact problem / C.H. Venner, A.A. Lubrecht // Proceedings of the Institution of

Mechanical Engineers. Part J.: Journal of Engineering Tribology. – 2000. – Vol. 214. – P. 43-62.

148. **Venner, C.H.** Transient Analysis of Surface Features in an EHL Line Contact in the Case of Sliding / C.H. Venner, A.A. Lubrecht // Transactions of the ASME. – 1994. – Vol.116. – P. 186-193.

149. **Venner, C.H.** Multilevel Solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part I: theory and numerical algorithm / C.H. Venner, W.E. Napel // Wear. – 1992. – Vol. 152(2). – P. 351-367.

150. **Venner, C.H.** Multilevel Solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem. Part 2: Smooth Surface Results / C.H. Venner, W.E. Napel // Wear. – 1992. – Vol. 152(2). – P. 369-381.

151. **Wang, S.** Thermal Analysis of Elastohydro-Dynamic Lubrication of Line Contacts Using the ReeEyring Fluid Model / S. Wang, C. Cusano, T.F. Conry // Journal of Tribology. – 1991. – Vol. 113. – P. 232-244.

152. **Zhao, J.** Analysis of EHL Circular Contact Shut Down / J. Zhao, F. Sadeghi // Transaction of the ASME-Journal of Tribology. – 2003. – V. 125. – No.1. – P. 76-90.

153. **Zhao, J.** Analysis of EHL circular contact start up: Part I - Mixed contact model with pressure and film thickness results / Zhao J., Sadeghi F., Hoeprich M.H. // Transaction of the ASME-Journal of Tribology. –2001. – V. 123. – P. 67–74.

154. **Zhao, J.** Analysis of EHL circular contact start up: part II—Thermal model with surface results / Zhao J., Sadeghi F., Hoeprich M.H. // Transaction of the ASME-Journal of Tribology. – 2001. – V. 123. – P. 75–82.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

1. Коды программ расчета опорного подшипника скольжения

%Script файл расчета подшипника при не заданном количестве масла,

%прокачиваемом через подшипник

```
clear;
clc;
R=0.09;%радиус [м]
L=0.135;%Осевая длина вкладыша
psi=0.004;%Относительный зазор psi=зазор/R
u=10;%Скорость скольжения
K=10e+6;%Удельная нагрузка в подшипнике
W=K*L*2*R;%Нагрузка на подшипник
vis_40=0.03;% Вязкость масла при 40 градусpx поЦельсию [Па*сек]
m=2.0;%Коэффициент зависимости вязкости масла от температуры
tvx=30;%Температура масла на входе в подшипник
hm=0.01;%Начальное приближение для безразмерной минимальной
толщины %смазочного слоя
H=0.012;%Ширина зазора между масляными карманами и торцами
вкладыша
p_n=0.8e+5;%Давление масла на входе в подшипник
res=Calc_Bearing(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,W,H,p_n);
hdim=res(1)%Минимальная размерная толщина смазочного слоя [мкм]
tc=res(2)+273%Температура сливаемого из подшипника масла [градус
%Кельвина]
tmax=res(3)+273%Максимальная температура в смазочном слое
[градус %Кельвина]
```

%Script файл расчета подшипника при заданном количестве масла,
...

%прокачиваемом через подшипник

```
clear;
clc;
R=0.09;%радиус [м]
L=0.135;%Осевая длина вкладыша
psi=0.004;%Относительный зазор psi=зазор/R
u=10;%Скорость скольжения
K=10e+6;%Удельная нагрузка в подшипнике
W=K*L*2*R;%Нагрузка на подшипник
vis_40=0.03;% Вязкость масла при 40 градусpx поЦельсию [Па*сек]
m=2.0;%Коэффициент зависимости вязкости масла от температуры
tvx=30;%Температура масла на входе в подшипник
Rac=250.0e-6;%Общее количество масла, прокачиваемого через
%подшипник
hm=0.05;%Начальное приближение для безразмерной минимальной
толщины
%смазочного слоя
res=Calc_Bearing_Q(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,Rac,W);
```

```

hdim=res(1)%Минимальная размерная толщина смазочного слоя [мкм]
tc=res(2)+273%Температура сливаемого из подшипника масла [градус
%Кельвина]
tmax=res(3)+273%Максимальная температура в смазочном слое
[градус %Кельвина]

```

```

function [y]=Calc_Bearing(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,W,H,p_n)
h=Calc_hm(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,W,H,p_n)
h_D=h(1)*psi*R*1.0e+6;
t_c=tvx*h(2);
t_max=tvx*h(2)*h(3);
y=[h_D, t_c, t_max];
end

```

```

function [y]=Calc_Bearing_Q(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,Rac,W)
h=calc_hm_Q(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,Rac,W);
h_D=h(1)*psi*R*1.0e+6;
t_c=tvx*h(2);
t_max=tvx*h(2)*h(3);
y=[h_D, t_c, t_max];
end

```

```

function [y] = Calc_hm(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,W,H,p_n)
h1=hm;
vis_vx=vis_40*(40/tvx)^m;
t=tc_tmax(psi,u,R,L,tvx,vis_vx,m,h1,H,p_n);
vist=vis_vx/(t(1)*t(2))^m;
pzt=6*u*vist/(R*psi^2);
Bt=W/(R*L*pzt);
el=2.0e+11;
nu=0.3;
p0=psi*el/(1-nu^2)/8;
Vt=pzt/p0;
h=h_m(Vt,Bt);
eps=0.001;
a=abs(h-h1)/eps;
if a<2
    y=[h,t];
else
    N=log(a)/log(2.0);
    i=1;
    while i<(N+1)
        h1=0.5*(h+h1);
        t=tc_tmax(psi,u,R,L,tvx,vis_vx,m,h1,H,p_n);
        vist=vis_vx/(t(1)*t(2))^m;
        pzt=6*u*vist/(R*psi^2);
        Bt=W/(R*L*pzt);
        Vt=pzt/p0;
        h=h_m(Vt,Bt);
        i=i+1;
    end;
    y=[h,t];
end

```

```

end;

end
function [y] = calc_hm_Q(psi,u,R,L,tvx,vis_40,m,hm,Qn,W)
    h1=hm;
    vis_vx=vis_40*(40/tvx)^m;
    t=tc_tmax_Q(psi,u,R,L,tvx,vis_vx,m,h1,Qn);
    vist=vis_vx/(t(1)*t(2))^m;
    pzt=6*u*vist/(R*psi^2);
    Bt=W/(R*L*pzt);
    el=2.0e+11;
    nu=0.3;
    p0=psi*el/(1-nu^2)/8;
    Vt=pzt/p0;
    h=h_m(Vt,Bt);
    eps=0.001;
    a=abs(h-h1)/eps;
    if a<2
        y=[h,t];
    else
        N=log(a)/log(2.0);
        i=1;
        while i<(N+1)
            h1=0.5*(h+h1);
            t=tc_tmax_Q(psi,u,R,L,tvx,vis_vx,m,h1,Qn);
            vist=vis_vx/(t(1)*t(2))^m;
            pzt=6*u*vist/(R*psi^2);
            Bt=W/(R*L*pzt);
            Vt=pzt/p0;
            h=h_m(Vt,Bt);
            i=i+1;
        end;
        y=[h,t];
    end;

end

function y = calc_Tmax(S,hm)
if S<=1.3
    y=calc_Tmax_Sm(S,hm);
else
    y1=calc_Tmax_Sm(1.2,hm);
    y2=calc_Tmax_Sm(1.3,hm);
    if S<=4
        y=y1+(S-1.2)*10.0*(y2-y1)-0.1*(S-1.3)^1.95;
    else
        y=y1+(S-1.2)*10.0*(y2-y1)-0.05*(S-1.3)^1.95;
    end
end
end

function y = calc_Tmax_Sm(S, hm)

```

```

S0=[0:0.1:1.3];
g1=[1.0 1.425 1.595 1.702 1.8 1.885 1.95 2.03 2.1 2.165 2.22
2.27 2.32 2.37];
p1=polyfit(S0, g1, 9);
t(1)=polyval(p1,S);
g10=[1.0 1.04 1.08 1.12 1.16 1.215 1.255 1.3 1.335 1.38 1.42
1.46 1.495 1.52];
p10=polyfit(S0, g10, 3);
t(10)=polyval(p10,S);
g9=[1.0 1.06 1.125 1.19 1.24 1.295 1.34 1.4 1.445 1.485 1.525
1.56 1.6 1.62];
p9=polyfit(S0, g9, 3);
t(9)=polyval(p9,S);
g8=[1.0 1.08 1.15 1.225 1.28 1.345 1.4 1.45 1.5 1.54 1.58 1.62
1.655 1.69];
p8=polyfit(S0, g8, 3);
t(8)=polyval(p8,S);
g7=[1.0 1.099 1.19 1.265 1.33 1.4 1.46 1.515 1.56 1.6 1.64 1.68
1.72 1.755];
p7=polyfit(S0, g7, 3);
t(7)=polyval(p7,S);
g6=[1.0 1.125 1.23 1.32 1.395 1.47 1.54 1.6 1.645 1.683 1.72
1.77 1.8 1.83];
p6=polyfit(S0, g6, 3);
t(6)=polyval(p6,S);
g5=[1.0 1.16 1.29 1.375 1.455 1.525 1.59 1.65 1.705 1.75 1.8
1.845 1.88 1.931];
p5=polyfit(S0, g5, 7);
t(5)=polyval(p5,S);
g4=[1.0 1.19 1.315 1.415 1.5 1.58 1.65 1.725 1.775 1.825 1.88
1.92 1.98 2.026];
p4=polyfit(S0, g4, 7);
t(4)=polyval(p4,S);
g3=[1.0 1.23 1.365 1.48 1.57 1.655 1.73 1.8 1.86 1.925 1.985
2.045 2.095 2.13];
p3=polyfit(S0, g3, 5);
t(3)=polyval(p3,S);
g2=[1.0 1.3 1.45 1.57 1.67 1.755 1.823 1.9 1.975 2.025 2.095
2.145 2.195 2.23];
p2=polyfit(S0, g2, 5);
t(2)=polyval(p2,S);
h=[0.02 0.04 0.06 0.09 0.12 0.16 0.22 0.35 0.45 0.8];
pt=polyfit(h,t,5);
y=polyval(pt,hm);
end

function y = eq_n(t,m,hm,V0,S0,K_2s)
    al0=al_0(hm);
    SS=S0;
    if S0>3
        SS=3+0.325*(S0-3);
    end;
    KK=(al0+0.0584*V0/t^m)*SS./t^(m+1);

```

```

    q0=q0_hm(hm,V0/(12*pi*t^m));
    qt=q0*exp(-KK);
    pr=K_2s*qt/t^m;
    y=pr;
end

function y = eq_n_Q(t,m,hm,V0,S0,K_2)
    a10=a1_0(hm);
    SS=S0;
    if S0>3
        SS=3+0.274*(S0-3);
    end;
    KK=(a10+0.0584*V0/t^m)*SS./t^(m+1);
    q0=q0_hm(hm,V0/(12*pi*t^m));
    qt=q0*exp(-KK);
    pr=K_2*qt/t^m;
    y=pr;
end

function y = h_m(VV,PP)
hh=[0.3,0.27,0.24,0.22,0.2,0.18,0.16,0.14,0.12,0.1,0.09,0.08,0.0
7,0.06,...
    0.05,0.04,0.03,0.02,0.015,0.01];
B=zeros(1);
h_=zeros(1);
B_=zeros(1);
V=log(VV);

V1=V;
if V<(-9.0)
    V1=-9.0;
end
Vr=-2.0786;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-0.0002775,-0.011106,-0.17956,-1.499,-6.884,-17.415,-23.625,-
9.8087];
B(20)=polyval(p,V1);

V1=V;
if V<(-6.75)
    V1=-6.75;
end
Vr=-2.0786;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-0.00014755,-0.003388,-
0.019957,0.12342,2.0778,9.636,18.055,15.74];
B(19)=polyval(p,V1);
V1=V;

```

```

if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.39884;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[0.0084471,0.19291,1.6083,5.8208,8.4658,7.5811];
B(18)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-1.4692;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-0.00030323,-0.0074295,-0.065084,-
0.21378,0.046769,1.407,1.3742,3.0808];
B(17)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.99669;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-0.0001012,-
0.0011742,0.0098357,0.21888,1.2491,2.7375,1.658,2.8065];
B(16)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.7234;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[3.9087e-
05,0.0024573,0.044632,0.35982,1.3863,2.2334,0.6948,2.3086];
B(15)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.86015;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[0.00015419,0.0051305,0.066966,0.43134,1.3835,1.824,0.26468,2.
1331];
B(14)=polyval(p,V1);

```

```

V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.68896;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[0.00019974,0.005902,0.069045,0.3986,1.1242,1.1721,-
0.20305,1.9532];

B(13)=polyval(p,V1);

V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.53512;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[0.00021505,0.0059461,0.064794,0.34451,0.86539,0.66725,-
0.45662,1.8328];
B(12)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.40632;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[0.00021254,0.0056065,0.057815,0.28626,0.63895,0.29844,-
0.57309,1.7374];
B(11)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.30165;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[0.00020634,0.0052337,0.051437,0.23838,0.47021,0.062699,-
0.59208,1.6538];
B(10)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=-0.37164;
if V>Vr

```

```

        V1=Vr;
end
p=[-1.948e-06,5.5634e-
06,0.0012174,0.019374,0.13906,0.51949,0.95414,0.58053,-
0.1157,1.5628];
B(9)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.17404;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[2.0065e-
06,0.00010086,0.0019195,0.018574,0.099001,0.28,0.31363,-
0.18171,-0.39779,1.3074];
B(8)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.39884;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[3.8665e-
06,0.00014384,0.0022089,0.017956,0.081221,0.18745,0.11414,-
0.30529,-0.31064,1.1326];

B(7)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.39884;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[8.0072e-
06,0.00025771,0.0034406,0.024373,0.095923,0.18971,0.079832,-
0.29369,-0.22052,0.95885];
B(6)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.39884;
if V>Vr
    V1=Vr;
end

```

```

p=[8.431e-
06,0.00026057,0.0033165,0.022158,0.08062,0.13893,0.010656,-
0.28175,-0.14746,0.79279];
B(5)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.39884;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-1.9467e-05,-0.00061385,-0.0078126,-0.051086,-0.1781,-
0.2928,-0.074345,0.63806];
B(4)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.39884;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-2.9592e-05,-0.00081974,-0.0092234,-0.05364,-0.16715,-
0.2445,-0.037285,0.48787];
B(3)=polyval(p,V1);

V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.68818;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-1.75e-05,-0.00049919,-0.0057569,-0.034058,-0.10651,-
0.15066,-0.0016216,0.27697];
B(2)=polyval(p,V1);
V1=V;
if V<(-6.5)
    V1=-6.5;
end
Vr=0.91232;
if V>Vr
    V1=Vr;
end
p=[-1.1363e-05,-0.00033556,-0.0039751,-0.023935,-0.075266,-
0.10479,0.0046738,0.087103];
B(1)=polyval(p,V1);
P=log(PP);
j=1;
if P<=B(1)
    y=hh(1);

```

```

else for i=1:20
    if P>B(i)
        j=i;
    end
end
end
if j==20
    y=hh(20);
else
    if j==1
        h1=hh(j);
        h2=hh(j+1);

        B1=B(j);
        B2=B(j+1);
        y=((h2-h1)*P+(h1*B2-h2*B1))/(B2-B1);
        % y=hh(1)
    else
        h_(1)=hh(j-1);
        h_(2)=hh(j);
        h_(3)=hh(j+1);
        B_(1)=B(j-1);
        B_(2)=B(j);
        B_(3)=B(j+1);
        p=polyfit(B_,h_,2);
        y=polyval(p,P);
    end
end
end
end

```

```

function y = Iter_Tc(hm,K_2s,V0,S0,m)
    fun=-1.0;
    t=1.0;
    while fun<0.0
        t=t+0.01;
        fun=t-1-eq_n(t,m, hm, V0,S0,K_2s);
    end
    y=t;
end

```

```

function y = Iter_Tc_Q(hm,K_2,V0,S0,m)
    fun=-1.0;
    t=1.0;
    while fun<0.0
        t=t+0.01;
        fun=t-1-eq_n_Q(t,m, hm, V0,S0,K_2);
    end
    y=t;
end

```

```

function y =q0_hm(h_m,V0)

```

```

    hm=[0.0125 0.025 0.05 0.075 0.1 0.125 0.15 0.175 0.2 0.225 0.25
0.275 0.3 0.325 0.35 0.4];
    q1=[2.4 1.5 1.27 1.12 1.05 1.0 0.95 0.905 0.86 0.835 0.815 0.8
0.799 0.7985 0.7982 0.79];
    p1=polyfit(hm, q1, 3);
    q2=[2.8 2.2 1.6 1.4 1.2 1.08 0.98 0.925 0.87 0.84 0.82 0.8 0.799
0.7985 0.7982 0.798];
    p2=polyfit(hm, q2, 5);
    a(1)=polyval(p1,h_m);
    q7=[5.0 3.9 3.2 2.8 2.2 2.0 1.82 1.65 1.47 1.33 1.2 1.09 1.0
0.94 0.88 0.798];
    p7=polyfit(hm, q7, 5);
    a(7)=polyval(p7,h_m);
    q6=[4.5 3.3 2.67 2.27 2.0 1.8 1.58 1.4 1.25 1.12 1.02 0.92 0.85
0.84 0.8 0.798];
    p6=polyfit(hm, q6, 5);
    a(6)=polyval(p6,h_m);
    q5=[4.0 2.97 2.4 2.1 1.82 1.59 1.39 1.2 1.08 0.98 0.89 0.83
0.799 0.7985 0.7982 0.798];
    p5=polyfit(hm, q5, 5);
    a(5)=polyval(p5,h_m);
    q4=[3.7 2.8 2.15 1.83 1.58 1.38 1.2 1.08 0.98 0.9 0.84 0.8 0.799
0.7985 0.7982 0.798];
    p4=polyfit(hm, q4, 5);
    a(4)=polyval(p4,h_m);
    q3=[3.2 2.5 1.9 1.6 1.398 1.249 1.1 1.0 0.9 0.85 0.82 0.8 0.799
0.7985 0.7982 0.798];
    p3=polyfit(hm, q3, 5);
    a(3)=polyval(p3,h_m);
    a(2)=polyval(p2,h_m);
    V_0=[0.0 0.003 0.006 0.01 0.03 0.06 0.1];
    ppp=polyfit(V_0,a,5);
    y=polyval(ppp,V0);
    y=10.0^y;
end

```

```

function y = Rac_N(xi,fi)
    N=60;
    d=pi/3.0;
    dx=d/N;
    a=0.0;
    for i=1:N
        x=d+i*dx;
        a=a+(1.0-xi*cos(x-fi)).^3;
    end
    y(1)=a*dx;
    a=0.0;
    for i=1:N
        x=4.0*d+i*dx;
        a=a+(1-xi*cos(x-fi)).^3;
    end
    y(3)=a*dx;
    d=2.0*pi/3.0;

```

```

dx=d/N;
a=0.0;
for i=1:N
    x=d+i*dx;
    a=a+(1-xi*cos(x-fi)).^3;
end
y(2)=a*dx;
end

function y = tc_tmax(psi,u,R,L,tx,vis_vx,m,hm,H,p_n)
el=2.0e+11;
nu=0.3;
pz=6*u*vis_vx/(R*psi^2);
p0=psi*el/(1-nu^2)/8;
V0=pz/p0;
S=vis_vx*u^2/(0.145*tx)
rac=Rac_N(0.95,0.0);
Q_n=(rac(1)+rac(3))*L/H+2.0*rac(2);
K_2s=6*vis_vx^2*u^2*L*L/(900*1920*p_n*R^4*psi^4*tx)/Q_n;
tc=Iter_Tc(hm,K_2s,V0,S,m);
St=S/tc^(m+1);
Q_nt=Q_n*tc^m;
tmax=calc_Tmax(St,hm);
y(1)=tc;
y(2)=tmax;
y(3)=Q_nt;
end

function y = tc_tmax_Q(psi,u,R,L,tx,vis_vx,m,hm,Q_n)
el=2.0e+11;
nu=0.3;
el=el/(1-nu^2);
V0=48*vis_vx*u/(R*el*psi^3)*(tx/40)^m;
S=vis_vx*u^2/(0.145*tx);
K_2=vis_vx*u^2*L/(900*1920*psi*tx*Q_n);
tc=Iter_Tc_Q(hm,K_2,V0,S,m);
St=S/tc^(m+1);
tmax=calc_Tmax(St,hm);
y(1)=tc;
y(2)=tmax;
end

function y =al_0(hm)
h_m=[0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4];
al=[1.3 1.0 0.87 0.8 0.75 0.72 0.695 0.675 0.66];
p=polyfit(h_m, al, 5);
y=polyval(p,hm);
end

```

2. Коды программ расчета параметров локального контакта

```
function y = h_m(G,V)
    G_G=[0,1,2,3,4,5,6,7,10,13,15,17,20];
    N_N=[8,8,8,8,8,8,8,8,10,10,10,10,10];
    pp=zeros(13,10);
    pp(1,1:8)=[0.000015805 0.00024676 -0.0024948 0.0090784 -0.035172
    0.13709...
    -0.28247 0.34837];
    pp(2,1:8)=[0.000017568 0.00020041 -0.0024325 0.0096233 -0.038375
    0.15934...
    -0.36914 0.47311];
    pp(3,1:8)=[0.000084589 -0.000021389 -0.0029976 0.011725 -0.03757
    0.16385...
    -0.42165 0.555705];
    pp(4,1:8)=[-0.000029154 0.00017933 -0.0018297 0.010814 -0.043813
    0.17769...
    -0.46962 0.63596];
    pp(5,1:8)=[0.000048519372544 0.000002625430776 -
    0.002548806549094...
    0.012494343504974 -0.043255948710180 0.18402308438048...
    -0.517671677084242 0.713275409891561];
    pp(6,1:8)=[-0.000063118 0.00023762 -0.0013688 0.010887 -
    0.049528...
    0.200401 -0.56311 0.78832];
    pp(7,1:8)=[0.000030395 0.000087018 -0.0023947 0.0123772 -
    0.0480198...
    0.20813 -0.60987 0.860324];
    pp(8,1:8)=[-0.000067244 0.00033196 -0.0013851 0.0103503 -
    0.053283...
    0.22622 -0.655012446934842 0.930412535831081];
    pp(9,1:10)=[0.000016850378171 -0.000061510746496 -
    0.000278896481895...
    0.001266344486514 -0.000910605797253 0.006759674504848...
    -0.058146358374872 0.268010242912246 -
    0.788410441538722...
    1.125822282991569];
    pp(10,1:10)=[0.000025991858682 -0.000073723893793 -
    0.000495330424944...
    0.001575819444715 0.000770359183107 0.005530429358212...
    -0.071094349234921 0.307637838396910 -
    0.903536879688047...
    1.315277920220240];
    pp(11,1:10)=[0.000025529122802 -0.000082304466048 -
    0.000503774498972...
    0.001797622820553 0.000968506371751 0.004469469084161...
    -0.077632175714238 0.335129172156410 -
    0.977739825577932...
    1.434605669648391];
    pp(12,1:10)=[0.000015510523892 -0.000106952856392 -
    0.000306270336245...
```

```

        0.002418017312874  -0.000440676033971  -
0.000050966060778...
        -0.078790156354160    0.374656812654360  -
1.056144102842857...
        1.535285009805645];
pp(13,1:10)=[-0.000011382392599  -0.000133208830047
0.000297419406028...
        0.003080746742725  -0.005505438949806  -0.004544214700091...
        -0.067985736075661    0.425688375963873  -
1.189683126254820...
        1.687638518139905];
if G>=20
    N=10;
    p=zeros(1,N);
    p1=zeros(1,N);
    for i=1:N
        p(i)=pp(12,i);
        p1(i)=pp(13,i);
    end;
    g1=17;
    g2=20;
    V1=log10(V);
    h=polyval(p,V1);
    h1=polyval(p1,V1);
    y=(h+(G-g1)/(g2-g1)*(h1-h))*V;
else
    for i=2:13
        if G_G(i)>G
            k=i;
            break;
        end;
    end;
    N1=N_N(k-1);
    N2=N_N(k);
    p=zeros(1,N1);
    p1=zeros(1,N2);
    for i=1:N1
        p(i)=pp(k-1,i);
    end;
    for i=1:N2
        p1(i)=pp(k,i);
    end;
    g1=G_G(k-1);
    g2=G_G(k);
    V1=log10(V);
    h=polyval(p,V1);
    h1=polyval(p1,V1);
    y=(h+(G-g1)/(g2-g1)*(h1-h))*V;
end;
end

```

```

function y = p_m(G,V)
    if V<-1
        y=1.0;
    else
        G_G=[0,1,2,3,4,5,6,7,10,20.001];
        N_N=[16,16,16,16,16,16,16,16,16,8];
        pp=zeros(10,16);
        pp(1,1:16)=[ 0.000019589297806   -0.000369276194345
0.002903280213521...
    -0.012046765296540  0.026439689024741 -0.020264731837601...
    -0.036159232028163   0.095361828093463 -0.051956770409625...
    -0.079443940539326   0.130541610165888  0.015400119454505...
    -0.131145588699235  -0.100426266620127 -0.107867354922482...
    0.914149558586893];
        pp(2,1:16)=[-0.000058817552139   0.000781169767111  -
0.003648813304262...
    0.004234633137564  0.021424521417265  -0.080545959806779...
    0.065310298550332   0.132500283113375 -0.261774028552051...
    -0.020391428158630   0.328877055273997  -
0.064521926965633...
    -0.243828195661058  -0.083038413931001  -
0.072042978087351...
    0.924527854250807];
        pp(3,1:16)=[-0.000312230661444   0.004709953611006  -
0.028072607452926...
    0.077149172605514  -0.057370612214568  -0.195059464225932...
    0.444931913680099  -0.022114764293500 -0.749870601343748...
    0.423442155040916   0.630766887902917  -0.432197034533668...
    -0.385147411353256   0.037964315909258  -
0.003687485312592...
    0.937885735564255];
        pp(4,1:16)=[-0.000607807519274   0.009578233132862  -
0.060928474496111...
    0.188905415581523  -0.227641161341444  -0.243706916239661...
    0.991390138702443  -0.543676250480326 -1.195247149139483...
    1.319246443833531   0.712619113085144  -1.068989891242357...
    -0.404537718319859   0.251859337314897
0.061445954587757...
    0.945924443207095];
        pp(5,1:16)=[-0.000134471502768   0.002330536342190  -
0.016689112706139...
    0.059994996240184  -0.089814013395561  -0.081978407115077...
    0.488318365612334  -0.406928837375005 -0.693359011796973...
    1.117379335428385   0.471949266731662  -1.125958415286323...
    -0.382297640677501   0.371548286257215
0.138717464904349...
    0.960964999756382];
        pp(6,1:16)=[ 0.001176909249118   -0.019067925922878
0.125378859259278...
    -0.410875517861779  0.599050333397029   0.118742091139774...
    -1.497969545240622   1.283363049861124  0.689838083458340...
    -1.189062742630200   0.358828336662957  -
0.117559031567083...

```

```

-0.570882072923047    0.289486196328833
0.276238112897078...
    0.997778055901788];
pp(7,1:16)=[0.002010112643768    -0.033139310381284
0.222189429330318...
    -0.743157160055158    1.096627053305347    0.313602313272564...
    -3.162468363345875    2.687066062630260    2.138085023811282...
    -3.528228654549918    0.049626461425922
1.230645749399863...
    -0.721834126602992    0.036582073837041
0.433600495575715...
    1.063557410718319];
pp(8,1:16)=[ -0.001137737316699    0.011195666594328    -
0.019618756325843...
    -0.156844960884234    0.777407768363782    -0.924764024004530...
    -1.317561272079785    3.503282485695349    -0.062289049531430...
    -4.225294185721845    1.341182409596508
2.114657229570658...
    -1.170555253696199    -0.371519335414061
0.602717183910725...
    1.177042413308994];
pp(9,1:16)=[-0.001969642057803    0.030645937570163    -
0.191597981602479...
    0.583398622646916    -0.715606247010335    -0.526322169983914...
    2.403882618199393    -1.551935949200922    -1.738771648312375...
    2.320489526977333    0.046052354473909    -0.946969490960621...
    -0.084689399020618    -0.005889330751635
0.472066262945093...
    1.272448796730400];
pp(10,1:8)=[ -0.036047081137091    0.129989888883931
0.065391295442869...
    -0.387044248758833    -0.294072718380552    0.158130116084711...
    0.566205464594058    1.374929936868247];
    for i=2:10
        if G_G(i)>G
            k=i;
            break;
        end;
    end;
    N1=N_N(k-1);
    N2=N_N(k);
    p=zeros(1,N1);
    p1=zeros(1,N2);
    for i=1:N1
        p(i)=pp(k-1,i);
    end;
    for i=1:N2
        p1(i)=pp(k,i);
    end;
    g1=G_G(k-1);
    g2=G_G(k);
    V1=log10(V);
    P_P=polyval(p,V1);

```

```

P_P1=polyval (p1,V1);
y=P_P+ (G-g1) / (g2-g1) * (P_P1-P_P);
end;
end

```

Приложение Б.

(справочное)

Документы, подтверждающие результаты научных исследований.



РУСПОЛИМЕТ
(АО «Русполимет»)

ОГРН 1055214499966
ИНН/КПП 5251008501/525101001

607018, Россия
Нижегородская область, г.о.г. Кулебаки,
г. Кулебаки, ул. Восстания, 1/15, каб. 304
Факс: +7 (83176) 5-12-75, 5-44-60
Тел.: +7 (83176) 7-90-00, 7-90-69
E-mail: ruspolymet@ruspolymet.ru

Утверждаю
Главный инженер АО «Русполимет»:
А.Ю. Орлов
2023 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Усова Павла Павловича
«Новые методологии расчета гидродинамических узлов трения
в условиях упругих и вязкоупругих деформаций»,
представленной на соискание ученой степени доктора технических наук
по научной специальности 2.5.3 – Трение и износ в машинах

Научно-техническая комиссия акционерного общества "Русполимет" в составе:

- главный инженер Орлов Алексей Юрьевич, председатель комиссии;
- начальник Управления по техническому обслуживанию и ремонту оборудования Пронин Сергей Евгеньевич, член комиссии;
- начальник кольцепрокатного производства Горшков Игорь Александрович, член комиссии;
- начальник кольцепрокатного производства Шорин Алексей Вячеславович, член комиссии.

составила настоящий акт о внедрении отдельных результатов диссертационной работы П.П. Усова, выполненной в ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова» Российской академии наук, в производственную практику АО "Русполимет" при эксплуатации и ремонте технологических машин и оборудования.

Использование разработанной автором диссертации инженерной методики расчета контактных параметров опорных подшипников скольжения жидкостного трения (в совокупности с соответствующей компьютерной программой и базой данных) в практику службы главного инженера позволило получить следующие результаты применительно к тяжелонагруженным подшипниковым узлам валков кольцепрокатного оборудования:

- на стадии эксплуатации - с учетом упругой деформации уточнить геометрические и гидродинамические контактные параметры, а также уровень расхода смазочного материала, обеспечивающие повышение несущей способности и долговечности подшипниковых узлов;
- на стадии ремонта - установить расширенный диапазон геометрических размеров подшипников и цапф валков для обеспечения длительной бесперебойной эксплуатации подшипниковых узлов.

Годовой экономический эффект использования научно-технической разработки в условиях предприятия оценивается в размере до 2,3 млн. рублей.

Члены научно-технической комиссии:

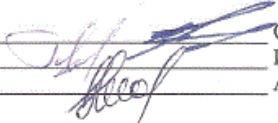

 _____ С.Е.Пронин
 _____ И.А.Горшков
 _____ А.В.Шорин

Рис. Б_1. Акт о внедрении из АО «Русполимет».

УТВЕРЖДАЮ

Директор инженерно-технологического
центра АО «Выксунский металлургический
завод»



А. В. Мунтин

2023 г.

АКТ

Об использовании результатов докторской диссертационной работы
Усова Павла Павловича
на тему: «Новые методологии расчета гидродинамических узлов трения
в условиях упругих и вязкоупругих деформаций»,

Экспертная техническая комиссия АО «Выксунский металлургический завод» в составе:

- 1) Л. И. Эфрон – научный руководитель, председатель комиссии;
- 2) М. Б. Грязнов – начальник лаборатории по технической диагностике;
- 3) Е. И. Елистратов – начальник цеха ремонта металлургического оборудования,

составила настоящий акт о том, что отдельные результаты и элементы диссертационной работы Усова Павла Павловича «Новые методологии расчета гидродинамических узлов трения в условиях упругих и вязкоупругих деформаций», представленная на соискание учёной степени доктора технических наук по научной специальности «Трение и износ в машинах», использованы в деятельности Инженерно-технологического центра АО «Выксунский металлургический завод» в виде:

1. Научно-практических рекомендаций и инженерной методики расчёта рабочих характеристик смазочного слоя в гидродинамических узлах трения тяжело нагруженных подшипниковых узлов применительно к опорам валков прокатных станов «SMS Siemag» с учётом упругих и вязкоупругих деформаций;

2. Программных комплексов, реализующих указанную методику при компьютерном проектировании указанных узлов, а также при определении их геометрических характеристик на стадии ремонта и восстановления.

Результаты работы и научно-практические рекомендации, предложенные автором диссертации, также планируется использовать в аналогичных целях применительно к кузнечно-прессовому и иному технологическому оборудованию, содержащему гидродинамические опоры и работающему в условиях значительных механических нагрузок.

Председатель комиссии _____ Л. И. Эфрон

Член комиссии _____ М. Б. Грязнов

Член комиссии _____ Е. И. Елистратов



А К Т

о внедрении результатов диссертационной работы,
представленной на соискание ученой степени доктора технических наук

Мы, нижеподписавшиеся, представители ФГБУН «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова» Российской академии наук (далее - ИМАШ РАН): заведующий отделом «Трение, износ, смазка. Трибология», д.т.н., профессор Албагачиев А.Ю. и старший научный сотрудник, к.т.н., доцент Усов П.П., с одной стороны, и представители АО «ПО «Муроммашзавод»: Директор по перспективным проектам Измайлов П.В., технический директор Сучилин Д.Н., исполняющий обязанности главного конструктора Каскевич И.Ф. с другой стороны, составили настоящий акт о внедрении отдельных результатов диссертационной работы Усова П.П. на тему «Новые методологии расчётов гидродинамических узлов трения в условиях упругих и вязкоупругих деформаций», представленной на соискание учёной степени доктора технических наук.

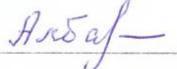
В результате внедрения предложенной инженерной методики расчёта параметров локального линейного упруго-гидродинамического контакта в деятельность Центра разработки и перспективных решений АО «ПО «Муроммашзавод» с целью уточнённой оценки параметров контакта зубьев прямозубых цилиндрических зубчатых передач изделий «Колесный редуктор 4319-2601010», «Планетарный редуктор АДФМ.123.00.000» на стадии проектирования достигнуто следующее:

- определение уточнённого значения максимального давления в контакте и толщины гидродинамического смазочного слоя с учётом упругой деформации зубьев, что повышает достоверность оценки реализации жидкостного трения;
- повышение точности прогнозирования долговечности и надёжности зубчатой передачи;
- предотвращение возможных ошибок проектирования, приводящих к экономическому ущербу.

Инженерная методика запрограммирована автором и представлена в виде двух программных комплексов. Один программный комплекс - в среде MatLab и второй программный комплекс - в среде Borland Delphi, зарегистрированный в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2022662966.

Ожидаемый годовой экономический эффект от внедрения научной и инженерной разработок, предложенных автором диссертации, составляет 1,3 млн. рублей.

Представители ИМАШ РАН:

 А.Ю. Албагачиев
 П.П. Усов

Представители АО «ПО «Муроммашзавод»:

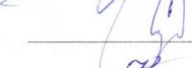
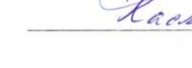
 П.В. Измайлов
 Д.Н. Сучилин
 И.Ф. Каскевич

Рис. Б_3. Акт о внедрении из АО «Муромский машиностроительный завод».